J. Math. Soc. Japan
Vol. 14, No. 4, 1962

Sur l'équation fonctionnelle de Cauchy pour les matrices

Par Akira KUWAGAKI

(Reçu le 11 oct., 1961)
(Revisé le 3 juil., 1962)

§ 1. Introduction

Soit χ une algèbre à une opération binaire notée $\cdot$ et soit Φ une algèbre à une opération binaire notée $\circ$. Nous considérerons l'équation fonctionnelle en une fonction inconnue f qui applique χ dans Φ:

$$f(x \cdot y)=f(x) \circ f(y).$$

Déjà, de nombreuses études sur cette équation fonctionnelle ont été faites dans le cas où χ et Φ sont des algèbres particulières ([1], [2]). L'équation la plus simple et la plus essentielle est celle de Cauchy en une fonction réelle continue f d'avec variable réelle:

(FSS) $$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Une généralisation de (FSS) est le cas où χ et Φ sont des espaces vectoriels

(VSS) $$f_i(x_1+y_1, \cdots, x_m+y_m)=f_i(x_1, \cdots, x_m)+f_i(y_1, \cdots, y_m) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

Cette équation (VSS) est facilement résolue par le même moyen que celle de Cauchy. On trouve sa solution dans le livre de J. Aczél [2] (pp. 153 et 154) ([3]).

Le but de notre présent mémoire est de chercher toutes les solutions dans le cas naturellement généralisé où χ et Φ sont des algèbres de matrices carrées. Il y a quatre types des équations comme suivants (M désigne le groupe additif de matrices carrées et GL désigne le groupe multiplicatif de matrices régulières.)

(MSS) $$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

où f est une application de $\mathrm{M}(m, \boldsymbol{R})$ dans $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$, mais cette équation est essentiellement identique à l'équation (VSS);

(MSP) $$f(x+y)=f(x)f(y)$$

où f est une application de $\mathrm{M}(m, \boldsymbol{R})$ dans $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$;

(MPS) $$f(xy)=f(x)+f(y)$$

où f est une application de $\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$ dans $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$;