J. Math. Soc. Japan
Vol. 14, No. 2, 1962

Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs

Par J. L. LIONS

(Reçu le 26 dec., 1961)

1. Introduction

1.1—Soient V et H deux espaces de Hilbert, avec $V \subset H$, l'injection de V dans H étant continue et V étant dense dans H. On désigne par (f, g) (resp. $((u, v))$) le produit scalaire dans H (resp. V); on pose: $|f| = (f, f)^{1/2}$, $\| u \| = ((u, u))^{1/2}$.

Soit $u, v \rightarrow a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur V. On suppose que

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Re} a(v, v) \geqq \alpha \| v \|^2, \quad \alpha > 0, \text{ pour tout } v \in V.$$

Le triplet $\{V, H, a(u, v)\}$ définit un opérateur A *non borné dans* H, de domaine $D(A)$, de la façon suivante (cf. par ex. Lions [1] chap. II): un élément u de V est dans $D(A)$ si la forme semi-linéaire

$$v \rightarrow a(u, v)$$

est continue sur V pour la topologie induite par H; alors

$$\text{(1.2)} \qquad a(u, v) = (Au, v), \qquad Au \in H,$$

ce qui définit A.

On munira toujours $D(A)$ de la norme du graphe: $(|u|^2 + |Au|^2)^{1/2}$, qui fait de $D(A)$ un espace de Hilbert.

Dans la terminologie de T. Kato [1], l'opérateur A est dit (lorsque (1.1) a lieu) *régulièrement accrétif* [1]. (Dans les notations de T. Kato, $V = D(\Phi)$).

On définit la *forme adjointe* $a^*(u, v)$ par

$$\text{(1.3)} \qquad a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}, \qquad u, v \in V.$$

Cette forme définit un opérateur A^*, par

$$\text{(1.4)} \qquad a^*(u, v) = (A^* u, v), \qquad u \in D(A^*),$$

dont on vérifie qu'il est l'adjoint de A.

Plusieurs auteurs (cf. la bibliographie de T. Kato [1]) ont défini les puissances fractionnaires A^ρ d'opérateurs A ayant diverses propriétés.

---

1) Au lieu de (1.1), M. Kato suppose seulement que Re $a(v, v) + \lambda |v|^2 \geqq \alpha \| v \|^2$. Mêmes résultats (raisonner sur $A + \lambda$ au lieu de A).