

**Généralisation, aux fonctions de plusieurs variables, des
théorèmes de Alexander Ostrowski et de Masuo
Hukuhara concernant les fonctions
convexes (J).**

Par Solomon MARCUS

(Reçu le 19, août, 1958)

1. Une fonction réelle, finie, f , définie sur un intervalle (a, b) de la droite, est dite *convexe* sur (a, b) si pour $x \in (a, b)$, $y \in (a, b)$ on a

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pour chaque couple de nombres réels positifs α et β , satisfaisant la relation $\alpha + \beta = 1$. Comme extensions naturelles de la notion de convexité pour les fonctions de deux variables on a étudié la notion de *fonction sousharmonique* et celle de *fonction doublement convexe*. Pour les propriétés de ces fonctions voir, par exemple, les travaux de Paul Montel et de Miron Nicolesco ([10], [11]).

Une fonction réelle, finie, f , définie sur un intervalle (a, b) de la droite est dite *convexe au sens de Jensen* ou tout simplement *convexe (J)* sur (a, b) , si pour $x \in (a, b)$, $y \in (a, b)$ on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \quad (1)$$

Tandis qu'une fonction convexe est toujours continue, une fonction convexe (J) peut être partout discontinue. Un problème du premier ordre, pour la convexité au sens de Jensen, c'est justement de trouver les conditions les plus modestes qui assurent que la fonction soit continue ou bornée. Une fonction convexe (J) qui est continue est, par ce fait même, convexe.

Mais la théorie des fonctions convexes (J), contrairement à celle des fonctions convexes, n'a été que partiellement transposée pour les fonctions de plusieurs variables réelles. Certaines propriétés de structure de ces fonctions, propriétés qui correspondent à certains faits établis, pour les fonctions d'une variable, par Felix Bernstein et Gustav Doetsch [1], ont été données par Henry Blumberg [2] et Ernst Mohr [9]. Dans ce qui suit nous allons donner l'analogie, pour les fonctions de plusieurs variables, des théorèmes suivants dûs, le premier, à Alexander Ostrowski [12] et le deuxième à Masuo Hukuhara [3]: