Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 7, No. 2, April, 1955

Sur les fonctions qui sont définies par l'induction transfinie

Par Tosiyuki TUGUÉ

(Reçu le 15 febrier, 1954)

Nous disons, avec H. Lebesgue, qu'une fonction de variables réelles est repésentable analytiquement lorsqu'on peut la construire en effectuant un nombre fini ou bien dénombrable infini d'additions $+$, de multiplications $\times$ et de passages à la limite, à partir de variables et de constantes suivant une loi déterminée. La famille des fonctions appartenant à la classification de Baire ne diffère pas de celle des fonctions représentables analytiquement[1]. H. Lebesgue a démontré dans son Mémoire renommé ([12]) l'existence des fonctions de toute classe et celle d'une fonction qui ne peut pas être représentable analytiquement. Il est un important et intéressant problème que de reconnaitre si la fonction non représentable analytiquement définie par H. Lebesgue est projective ou non et, si oui, quelle est la classe de projectivité qui contient cette fonction.[2]

Cette fonction ne peut pas être définie sans faire appel au transfini, c'est-à-dire à un nombre transfini des passages à la limite. Néanmoins, M. N. Lusin a nommé d'un seul coup une fonction universelle pour les fonctions de Baire dont l'image géométrique est projective de classe $\leqq 2$ sans faire appel au transfini[3]. D'autre part, M. W. Sierpinski ([15]) a démontré qu'il n'existe aucun ensemble analytique qui soit une image géométrique d'une fonction universelle pour les fonctions de Baire, tandis que M. K. Kunugui ([5]) a montré qu'il existe une surface qui est un complémentaire analytique, et est une image géométrique d'une telle fonction.

M. C. Kuratowski[4] qui a introduit le premier l'induction transfinie

---

1) Voir R. Baire [1] et H. Lebesgue [12].
2) Cf. N. Lusin [13], p. 202.
3) Ibid., p. 314.
4) C. Kuratowski [8], [9].