Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 5, No. 2, July, 1953.

Sur l'equation intégrale

$$x\,u(x)=f(x)+\int_0^x K\big(x,t,u(t)\big)\,dt.$$

Par Tokui SATŌ

(Reçu le 19 mai, 1952)

1. Le théorème d'existence de Cauchy relatif aux équations différentielles peut s'étendre immédiatement à l'équation intégrale de Volterra

$$u(x)=f(x)+\int_0^x K\big(x,t,u(t)\big)\,dt,$$

où $f(x)$ et $K(x,t,u)$ sont régulières respectivement dans $|x|<r$ et dans $|x|<r$, $|t|<r$, $|u-f(x)|<\rho$. Nous voulons étudier ici, par une méthode analogue à celle de M. le Prof. Hukuhara pour les équations différentielles ordinaires,[1] le cas où $K(x,t,u)$ admet $x=0$ comme un pôle d'ordre 1. Dans ce cas nous pouvons écrire l'équation sous la forme

$$xu(x)=f(x)+\int_0^x K\big(x,t,u(t)\big)\,dt \tag{1}$$

où $f(x)$ $\big(f(0)=0\big)$ et $K(x,t,u)$ désignent des fonctions régulières respectivement dans $|x|<r$ et dans $|x|<r$, $|t|<r$, $|u-c_0|<\rho$.

THÉORÈME 1. *S'il existe une série*

$$u(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots \tag{2}$$

qui satisfait formellement à l'équation intégrale (1), *cette série a un rayon de convergence positif et représente une solution, qui est caractérisée par la propriété:* $u(x)-P_n(x)=0\,(x^n)$, *où* $P_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$, $n=[|\lambda|]+1$, $K'_u(0,0,c_0)=\lambda$.

Démontrons d'abord un

LEMME 1. *Si l'inéquation intégrale*

1) M. Hukuhara, Equations différentielles ordinaires, (1950), Iwanami, (en japonais).