Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Sur une Généralisation de la Coupure de Dedekind

Kinjiro KUNUGUI

1. En généralisant la notion de la coupure introduite par R. Dedekind, M. MacNeille[1] a donné une méthode d'obtenir une structure complète[2] à partir d'un ensemble quelconque (partiellement) ordonné.[3] M. MacNeille a opéré comme il suit : étant donné un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné R quelconque, on désigne par A^* l'ensemble de tous les éléments de R qui sont des bornes supérieures de A. De même, on désigne par A_* l'ensemble de tous les éléments de R qui sont des bornes inférieures de A. Une paire des deux sous-ensembles A_1, A_2 de R s'appelle une coupure, si l'on a, à la fois,

$$A_1=(A_2)_*, \quad A_2=(A_1)^*$$

et cette coupure au sens de MacNeille sera désignée par $\alpha=[A_1, A_2]$. L'ensemble de toutes les coupures, soit désigné par $\mathfrak{R}$, est ordonné par la définition suivante : on dit que deux coupures $\alpha'=[A_1', A_2']$, $\alpha''=[A_1'', A_2'']$ satisfont à la relation $\alpha'\leq\alpha''$ lorsqu'on a $A_1'\subseteq A_1''$ (et cela revient à dire qu'on a $A_2'\supseteq A_2''$). Avec cette définition de la coupure et de l'ordre des coupures, on voit facilement que l'ensemble $\mathfrak{R}$ est une structure complète. D'autre part, pour tout élément a de R, l'ensemble $A_1(a)$ de tous les éléments x de R qui satisfont à $x\leq a$, et l'ensemble $A_2(a)$ de tous les éléments y de R qui satisfont à $y\geq a$ forment une coupure $[A_1(a), A_2(a)]$. Cette coupure peut être considérée come identique à l'élément a, et ainsi l'ensemble R sera contenu dans $\mathfrak{R}$.

La notion de la coupure ainsi définie est une belle généralisation de la coupure employée par R. Dedekind dans sa fameuse théorie des nombres irrationnels, et lorsqu'on l'applique à l'ensemble de tous les nombres rationnels, on obtient comme $\mathfrak{R}$ l'ensemble de tous les nombres réels avec deux infinis $\pm\infty$.

2. Considérons maintenant la notion de la continuité au sens d'ordre. Pour cela, introduisons d'abord deux notions : la densité et la lacune. Un

---

1) MacNeille: Partially ordered sets, Trans. Am. Math. Soc., **42** (1937), pp. 416–460.

2) Voir p. ex. G. Birkhoff, Lattice theory, Am. Math. Soc. Colloquium publications Vol. XXV, New York City. 1940, p. 27.

3) Pour simplicité, nous appelons *ensemble ordonné* tout ensemble qui est partiellement ordonné.