Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables, VIII—Lemme Fondamental

Kiyoshi OKA

Introduction.—Les problèmes principaux depuis le Mémoire I sont : problèmes de Cousin, problème de developpement et problème des convexités[1]. Dans les Memoires I—VI[2], nous avons vu, disant un mot, que ces problèmes sont résolubles affirmativement pour les domaines univalents finis[3]. Et l'auteur a encore constaté quoique sans l'exposer, que ces résultats restent subsister au moins jusqu' aux domaines finis sans point critiques[4].

Il s'agit donc : ou bien d'introduire l'infini convenable, ou bien de permettre des points critiques ; or, on retrouvera que l'on ne sais presque

---

(1) Ces problèmes sont fondés sur H. Behnke et P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer Komplexer Veränderlichen, 1934. Nous allons les expliquer en formes précises. Soient $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ deux domaines connexes ou non sur l'espace de n variables complexes tels que $\mathfrak{D}_0 \subseteqq \mathfrak{D}$ (c'est-à-dire que $\mathfrak{D}_0$ soit un «Teilbereich» de $\mathfrak{D}$); nous appellerons que $\mathfrak{D}_0$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$, si $\mathfrak{D}_0 \subseteqq H$, H' étant la «Regularitätshulle» de $\mathfrak{D}_0$, et encore si, pour tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \Subset \mathfrak{D}_0$ (c'est-à.dire que $\Delta_0 \subset \mathfrak{D}_0$ et $\Delta_0 \ll \mathfrak{D}_0$), on peut trouver un domaine connexe ou non Δ tel que $\Delta_0 \subset \Delta \Subset \mathfrak{D}_0$ de façon qu à tout point P de $\mathfrak{D}_0—\Delta$, il corresponde une fonction f holomorphe dans $\mathfrak{D}$ telle que $|f(P_0)|>\max |f(\Delta_0)|$. Spécialement, si $\mathfrak{D}_0$ est ainsi par rapport à lui-même, nous l'appelons avec H. Behnke d'être holomorphe-convexe (regulär-konvex). Les problémes sont alors : Problèmes de Cousin. Trouver une fonction meromorphe (ou holomorphe) admettant les pôles (ou les zéros satisfaisant à une certaine condition) donnés dans un domaine holomorphe-convexe. Problème de développement. Soit $\mathfrak{D}_0$ un domaine (connexeou non) holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$; trouver, pour toute fonction holomorphe f_1, une série de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, convergente uniformément vers f dans tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \Subset \mathfrak{D}_0$. Porblème des convexités. Tout domaine psseudoconvexe est il holomorphe-convexe ? Pour les domaines univalents, on peut remplacer «holomorphe-convexe» par «domaine d'holomorphie», grâce au théorème de H. Cartan et P. Thullen.

(2) Les Mémoirs précédents sont : I—Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936 ; II—Domaines d'holomorphie, 1937 ; III—Deuxièmes problèmes de Cousin, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima Univarsity) ; IV—Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941 ; V—L'intégral de Cauchy, 1941 (Japanese Journal of Mathematics); Domaines pseudoconvexes, 1942 (Tohoku Mathematical Journal); VII—Sur quelques notions arithmetiques, 1950 (Bulletin de la Société Mathématique de France).

(3) Précisément dit, pour le deuxième problème de Cousin, nous avons montrer une condition nécessaire et suffisante pour les zéros ; et pour le problème des convexites, nous l'avons explique pour les deux variables complexes, pour dimenuer la répitation ultérieure inévitable.

(4) L'auteur l'a écrit aux détails en japonais à Prof. T. Takagi en 1943.