Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Über die Zerlegung rationaler Primzahlen in gewissen nicht-abelschen galoisschen Körpern

Sigekatu KURODA

Wenn auch die Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper als Klassenkörpertheorie zu einem vollständigen Abschluss gebracht worden ist, haben wir noch heute um nicht-abelsche Fälle doch nur geringe Kenntnisse. Während wir das Zerlegungsgestz der Primideale des Grundkörpers im relativ-abelschen Oberkörper in voller Klarheit überblicken können, sehen wir es doch im relativ-galoisschen Oberkörper nur durch einen Nebel. Dieser unbefriedigende Zustand mag wohl zum Teil darauf beruhen, dass wir heute nur über recht wenige Erfahrungen über nicht-abelsche galoissche Körper verfügen können, wovon das betreffende Zerlegungsgesetz lauter durch Begriffe im Grundkörper aufgefasst wird.

Ich werde hier allereinfachste absolute nicht-abelsche galoissche Körper vom Grade 2^n betrachten und das Zerlegungsgesetz der rationalen Primzahlen in ihnen durch Begriffe im rationalen Zahlkörper bestimmen (Satz 1). Dabei spielen biquadratische Reste und Nichtreste im rationalen Zahlkörper wesentliche Rolle. Das Symbol $\left(\frac{m}{p}\right)_4$ in der Formel (16) zeigt eine nicht-klassenkörpertheoretische Erscheinung der nicht-abelschen galoisschen Körper. Es ergibt sich aus dem hier herzuleitenden Zerlegungsgesetze in der galoisschen Erweiterung, dass diejenigen Primzahlen, wonach irgendeine Zahl biquadratischer Rest oder Nichtrest ist, durchkreuzt in gewissen Kongruenzklassen gleichverteilt sind (Satz 2). Es ist also wahrscheinlich, dass sich die Betrachtungen gewisser nicht-abelschen galoisschen Zahlkörper auf neue Kenntnisse, wie diejenigen Primideale, nach denen irgendeine Zahl n-ter Potenzrest ist, in Kongruenzklassen von einem n-te Einheitswurzeln nicht enthaltenden Zahlkörper verteilt sind, beziehen mögen.

1. Bezeichnungen: Falls folgende Bezeichnungen stillschweigend verwendet werden, so sind

R rationaler Zahlkörper;

k Gaussscher Zahlkörper $R(\sqrt{-1})$;

μ Gausssche ganze Zahl, welche keine Quadratzahl ausser ± 1 als Faktor hat und weder reell noch rein-imaginär ist;