Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 1, No. 3, May, 1951.

Über kommutative Ringe, in denen jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist

Keizo ASANO

Wir verstehen in diesem Note unter dem Ring stets einen kommutativen Ring mit dem Einsement. Ein Integritätsbereich mit dem Teilerkettensatz, in welchem die klassische Dedekind-Noethersche Idealtheorie gilt, heisst Dedekindsch. K. Kubo[1] hat bewiesen, dass ein Ring, in dem jedes von Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal als Produkt von Primidealen eindeutig darstellbar ist, ein Dedekindscher Integritätsbereich oder ein primärer einreihiger Ring ist. K. Matusita[2] zeigte, dass im Falle des Integritätsbereiches die Eindeutigkeit entbehrlich ist, also dass ein Integritätsbereich, in dem jedes Ideal sich als Produkt von Primidealen darstellen lässt, Dedekindsch ist. Schliesslich hat Y. Akizuki[3] bewiesen, dass ein Ring, in dem jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist, eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen ist. Wir werden in § 1 einen Beweis davon angeben. Ein Dedekindscher Integritätsbereich wird bekanntlich durch die drei Eigenschaften, nämlich die Ganzabgeschlossenheit, den Teilerkettensatz und die Teilerlosigkeit der Primideale charakterisiert. Man kann dabei die Ganzabgeschloseenheit durch die von M. Sono herrührende Bedingung ersetzen, dass kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ existiert. Es gilt sogar nach I.S. Cohen[4], dass ein Integritätsbereich mit dem Teilerkettensatz Dedekindsch ist, wenn man nur verlangt, dass es zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ für jedes teilerlose Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal gibt. Wir werden allgemein in § 2 beweisen, dass ein Ring mit dem Teilerkettensatz eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären Ringen ist,

1) K. Kubo, Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen, Journ. of Science of Hiroshima Univ. 10(1940), S. 77-81. Vgl. auch M. Moriya u. Y. Kobayasi, Eine notwendige Bedingung für die eindeutige Primfaktorzerlegung der Ideale in einem kommutativen Ring; Eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Primfaktorzerlegung der Ideale in einem kommutativen Ring, Proc. of Imp. Akad. Tokyo 17 (1941)

2) K. Matusita, Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind-Noethersche Idealtheorie, Japanese Journ. of Math. 19(1944), S- 97-110.

3) Er hat seinen Beweis veröffentlicht an der Konferenz der japanischen Algebraiker in 1947, aber noch nicht publiziert. Mein Beweis ist unabhängig von seinem Beweis.

4) I. S. Cohen, Commutative rings with restricted minimum condition, Duke math. Journ. 17 (1950).