

# SUR QUELQUES POINTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE.

ALEXANDRE GROTHENDIECK

(Reçu mars 1, 1957)

## Introduction<sup>1)</sup>

**I. Contenu du travail.** Ce travail a son origine dans une tentative d'exploiter l'analogie formelle entre la théorie de la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau [4], [5] et la théorie des foncteurs dérivés de foncteurs de modules [6], pour trouver un cadre commun permettant d'englober ces théories et d'autres.

Ce cadre est esquissé dans le Chapitre I, dont le thème est le même que celui de [3]. Ces deux exposés cependant ne se recouvrent pas, sauf dans le seul N°1.4. Je me suis attaché notamment à donner des critères maniables, à l'aide de la notion de sommes et produits infinis dans les catégories abéliennes, pour l'existence de "suffisamment" d'objets injectifs ou projectifs dans une catégorie abélienne, sans quoi les techniques homologiques essentielles ne peuvent s'appliquer. De plus, pour la commodité du lecteur, une place assez large a été faite à l'exposé du langage fonctoriel (N°s 1.1, 1.2 et 1.3). L'introduction des catégories additives au N° 1.3, préliminaire aux catégories abéliennes, fournit un langage commode (par exemple pour traiter des foncteurs spectraux au Chapitre II).

Le Chapitre II esquisse les points essentiels du formalisme homologique dans les catégories abéliennes. La parution de [6] m'a permis d'être très concis, les techniques de Cartan-Eilenberg se transportant sans aucun changement dans le nouveau cadre. Les numéros 2.1 et 2.2 ont été écrits cependant de façon à ne pas exclure les catégories abéliennes ne contenant pas assez d'objets injectifs ou projectifs. Dans les numéros suivants, nous employons à fond les techniques usuelles de résolutions. Les N°s 2.4 et 2.5 contiennent des compléments divers et sont essentiels pour la compréhension de la suite. En particulier, le théorème 2.4.1 donne une façon mécanique d'obtenir la plupart des suites spectrales connues (et en tous cas *toutes* celles rencontrées dans ce travail).

Dans le Chapitre III nous redéveloppons la théorie de la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau, y inclus les suites spectrales classiques de Leray. L'exposé donné ici représente un assouplissement par rapport à [4], [15], en particulier en ce que tous les résultats essentiels sont obtenus sans faire, à presque aucun moment dans ce Chapitre (pas plus que dans les suivants), d'hypothèse restrictive sur la nature des espaces envisagés; de sorte

1) L'essentiel des Chapitres I, II, IV et une partie du Chapitre III a été développé au printemps 1955, à l'occasion d'un séminaire d'Algèbre Homologique donné à l'Université de Kansas. — Les numéros entre crochets renvoient à la fin de cet article.