Chapitre IV Les Ext de faisceaux de modules.

4.1. Les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ **et** $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$. Soit X un espace topologique muni d'un faisceau $\mathbf{O}$ d'anneaux avec unité, et soit $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ la catégorie abélienne des $\mathbf{O}$-Modules (à gauche) sur X (cf. 3.1). Si A et B sont deux $\mathbf{O}$-modules, nous désignons par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ le groupe des $\mathbf{O}$-homomorphismes du premier dans le second (ce groupe est en fait un module sur le centre de $\Gamma(\mathbf{O})$). Si U est une partie quelconque de X, on posera

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\, A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}|U}(A|U, B|U)$$

(où $F|U$ désigne, comme d'habitude, la restriction d'un faisceau F à U). Bien entendu, si $V \subset U$, on a un homomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\, A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(V, A, B)$, et on vérifie immédiatment que si on se restreint aux parties ouvertes U de X, les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\, A, B)$ forment un *faisceau* sur X, noté $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$. Ainsi par définition, on a

(4.1.1) $$\Gamma(U, \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\, A, B)$$

et en particulier, faisant $U = X$:

(4.1.2) $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B) = \Gamma(\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)).$$

D'ailleurs, $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ peut aussi être considéré comme un faisceau de modules sur le *centre* $\mathbf{O}^\natural$ de $\mathbf{O}$.

Rappelons que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ est un *foncteur additif exact à gauche* en les deux arguments $A, B \in \mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, à valeurs dans les groupes abéliens. On en conclut que $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ peut aussi être regardé comme un foncteur exact à gauche en les deux arguments $A, B \in \mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, à valeurs dans la catégorie $\mathbf{C}^X$ des faisceaux abéliens sur X, (ou même à valeurs dans la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}^\natural}$). Comme d'habitude, tous les homomorphismes que nous écrirons seront "fonctoriels". Ce numéro donne quelques propriétés auxiliaires des foncteurs envisagés, préliminaires à l'étude de leurs foncteurs dérivés.

Soient $A, B \in \mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, et soit $x \in X$. Pour tout ouvert U contenant x, on a un homomorphisme évident $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\, A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x))$, d'où par passage à la limite inductive sur les voisinages ouverts de x, un homomorphisme naturel

(4.1.3) $$\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)(x) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x))$$

que nous allons étudier. Nous dirons que A *est de type fini en* x si on peut trouver un voisinage ouvert U de x tel que $A|U$ soit isomorphe à un quotient de $(\mathbf{O}|U)^n$ (où n est un entier fini > 0); A est dit *pseudo-cohérent en* x si on peut trouver un voisinage ouvert U de x, et *sur* U une suite exacte d'homomorphismes $\mathbf{O}^m \to \mathbf{O}^n \to A \to 0$ (m, n entiers finis > 0). Nous dirons que A est de type fini (resp. pseudo-cohérent) s'il l'est en tout point. Ceci posé:

Proposition 4.1.1. *L'homomorphisme* (4.1.3) *est un monomorphisme si A est de type fini en x, et un isomorphisme si A est pseudo-cohérent en x.*

Supposons A de type fini en x, alors, en se restreignant au besoin à un voisinage convenable de x, on a une suite exacte $\mathbf{O}^n \to A \to 0$ d'où une suite