SUR LES FONCTIONS QUI OPÈRENT SUR L'ANNEAU DE DIRICHLET $D(G)$

SATORU IGARI

(Received March 17, 1965)

1. On appelle contraction normale du plan complexe toute fonction T qui diminue la distance et conserve l'origine, c'est à dire $|T(z)-T(z')|\leqslant|z-z'|$ quels que soient les nombres complexes z, z' et $T(0)=0$.

Soit G un groupe abélien localement compact et soit ds la mesure de Haar sur G. On appelle, d'après Beurling-Deny [1], espace de Dirichlet spécial relativement à G un espace hilbertien complexe $D=D(G)$ dont les éléments sont des fonctions à valeurs complexes localement sommables, les quatre axiomes suivants étant vérifiés :

a. $\| u_n \| \to 0$ entraîne $\int_K | u_n(x) | \, dx \to 0$ pour tout compact $K \subset G$.

b. $C \cap D$ est dense dans C et dans D.

c. Si u est un élément de D et si T est une contraction normale, alors $Tu \in D$ et $\| Tu \| \leqslant \| u \|$.

d. Si u est un élément de D et s un point de G, alors la translatée de u par s est un élément $U_s u$ de D, $\| U_s u \| = \| u \|$ et $U_s u$ est une fonction continue de s.

Dans cette définition C est l'espace des fonctions continues sur G, á valeurs complexes et à support compact. On désigne par $\| u \|$ la norme de l'élèment u de D.

Suivant un théorème de Beurling-Deny on a : D est un espace de Dirichlet sur le groupe G abélien localement compact, si et seulement si il existe une fonction λ définie-négative réelle sur le groupe dual $\widehat{G}$ de G, dont l'inverse $1/\lambda$ est sommable sur tout compact de $\widehat{G}$ et telle que, pour tout élément $u \in C \cap D$, on ait

$$\| u \| = \left(\int_{\hat{G}} | \hat{u}(\hat{x}) |^2 \lambda(\hat{x}) \, d\hat{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$