Tôhoku Math. Journ.
Vol. 18, No. 3, 1966

ÜBER DIE RELATIVKLASSENZAHL EINES RELATIV-GALOISSCHEN ZAHLKÖRPERS VON PRIMZAHLPOTENZGRAD.

AKIO YOKOYAMA

(Received April 20, 1966)

l sei eine fixierte Primzahl und k ein endlicher algebraischer Zahlkörper, der als Grundkörper behandelt wird. Durch die Klassenkörpertheorie wird der Zusammenhang zwischen der Klassenzahl von k und eines zyklischen Erweiterungskörpers von Primzahlgrad ziemlich klar gemacht. In dieser Arbeit werden eine Aussage für die Teilbarkeit der Relativklassenzahl eines Galoisschen Erweiterungskörpers von Primzahlpotenzgrad über k durch eine beliebige Primzahl gemacht und eine grobe Abschätzung des Ranges der p-Klassengruppe eines solchen Körpers angegeben. Zur Vereinfachung gebrauche ich die folgenden Ausdrücke:

Unter der *p-Klassengruppe von k* versteht man die Gruppe $\mathfrak{C}_k$ der Divisorenklassen von p-Potenzordnung aus der Divisorenklassengruppe (im weiteren Sinn) von k, wo p eine beliebige Primzahl bezeichnet. Die Ordnung der p-Klassengruppe von k wird mit $h_{k,p}$ bezeichnet.

Es sei K ein relativ-Galoisscher Zahlkörper über k und $\mathfrak{g}$ seine Galoissche Gruppe. Dann operiert $\mathfrak{g}$ auf der vollen Divisorengruppe D und der p-Klassengruppe $\mathfrak{C}_K$ von K und daher werden diese Gruppen zur $\mathfrak{g}$-Gruppen. Es sei H die Untergruppe aller $\mathfrak{a} \in D$ mit $\mathfrak{a}^m \sim 1$ für einen zu p primen geeigneten Exponenten m. Die Faktorgruppe

$$\mathfrak{D} = D/H$$

ist dann $\mathfrak{g}$-isomorph zur p-Klassengruppe $\mathfrak{C}_K$ von K. Der H zugeordnete Klassenkörper $\mathrm{K}_{(p)}$ (dieses Bezeichnung werde auch weiterhin festgehalten) ist relativ-Galoissch über k. Es sei $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe von $\overline{K}_{(p)}/k$ und $\mathfrak{H}$ die Fixgruppe des Körpers K. Dann ist $\mathfrak{G}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{H}$ zur Faktorgruppe $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{\sigma} S_\sigma \mathfrak{H},$$

wobei die Summe über alle $\sigma \in \mathfrak{g}$ zu erstrecken ist, und $\mathfrak{H}$ wird zur $\mathfrak{g}$-Gruppe