Tôhoku Math. Journ.
24 (1972), 473-486.

ÜBER DIE APPROXIMATIONSORDNUNG BEI KUGELFUNKTIONEN UND ALGEBRAISCHEN POLYNOMEN

SIEGFRIED PAWELKE

(Received Dec. 23, 1971)

1. Einleitung. Für die Approximation stetiger, 2π-periodischer Funktionen auf der reellen Achse durch trigonometrische Polynome wurde ein direkter Satz von D. Jackson 1911 [8] und die Umkehrung von S. N. Bernstein 1912 [1] bewiesen und die Ergebnisse von A. Zygmund [25] 1945 verallgemeinert. 1949 stellte M. Zamansky [25] eine Beziehung zwischen der Approximationsordnung und dem Wachstum bezüglich n der Ableitungen der Approximationspolynome her; auf die Approximationsordnung für die Ableitungen der Funktion schloß S. B. Steĉkin 1951. Die Umkehrung des Ergebnisses von M. Zamansky bewies G. Sunouchi 1968 [21, 22], womit die Äquivalenz aller Aussagen gezeigt ist.

Die Übertragung der Ergebnisse auf Approximationsoperatoren in Banachräumen stammt von K. Scherer und P. L. Butzer [3, 4], wobei gewisse Voraussetzungen an die Operatorfolge (eine verallgemeinerte Bernsteinsche Ungleichung und eine sogenannte Jacksonsche Ungleichung) gestellt werden. An die Stelle der strukturellen Eigenschaften der Funktion, die durch das Verhalten des Stetigkeitsmoduls der Funktion charakterisiert werden, treten in allgemeinen Banachräumen Eigenschaften des von J. Peetre [17] eingeführten K-Funktionals.

In dieser Arbeit wird die Approximation von Funktionen, die auf der Einheitskugel S^k im R^k definiert sind, durch Linearkombinationen von Kugelfunktionen untersucht. Es wird für diesen Fall eine Bernstein-Ungleichung und die Jackson-Ungleichung bewiesen, wenn man die Ableitung durch den Laplace-Operator auf S^k ersetzt. Damit ist der oben zitierte allgemeine Satz von Butzer-Scherer anwendbar. Weiter kann man hier an Stelle des K-Funktionals einen verallgemeinerten Stetigkeitsmodul setzen. Anschließend wird der Spezialfall der zonalen Funktionen und ihre Approximation durch algebraische Polynome untersucht.

2. Bezeichnungen und elementare Eigenschaften. Es sei S^k die Oberfläche der Einheitskugel im k-dimensionalen euklidischen Raum R^k; x, y sind Punkte auf S^k und (x, y) ihr euklidisches Skalarprodukt. Mit $C(S^k)$ bezeichnet man den Banachraum der auf S^k definierten stetigen