Tôhoku Math. Journ.
30 (1978), 583-605.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

MONIQUE SABLÉ-TOUGERON

(Received June 15, 1977, revised November 21, 1977)

Introduction. Ce travail généralise et améliore les résultats de Pham The Laï [16]. Par l'étude du noyau de la résolvante, méthode employée par S. Agmon, on obtient un équivalent avec estimation du reste pour les valeurs propres d'un opérateur non nécessairement auto-adjoint, d'ordre $2m$, elliptique à l'intérieur, dégénérant à l'ordre k (k entier, $1 \leqq k \leqq 2m-1$), sur le bord d'un ouvert borné régulier de $\boldsymbol{R}^n$.

Dans le cas auto-adjoint et à l'ordre deux, le comportement asymptotique des valeurs propres a été déterminé, pour un opérateur particulier, par N. Shimakura [17] pour la boule unité, puis par C. Nordin [11] pour un domaine général; et pour un opérateur plus général, par L. Vulis et Z. Solomjak [18]. Pour une bibliographie plus complète sur ce sujet on renvoie à [18] et aussi [15].

1. Notations et hypothèses. Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$, de frontière Γ, tel qu'il existe une fonction φ de classe C^∞ dans $\boldsymbol{R}^n$ qui vérifie:

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n, \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \boldsymbol{R}^n, \varphi(x) = 0\} \\ \operatorname{grad} \varphi(s) \neq 0 \quad \text{pour} \quad s \in \Gamma \,. \end{cases}$$

Pour $m, k \in \boldsymbol{N}$, on considère les espaces de Sobolev avec poids:

$$W_m^{k/2}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega), \varphi^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leqq m\}\,,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \boldsymbol{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ avec $D_j = -i(\partial/\partial x_j)$. $W_m^{k/2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $(\sum_{|\alpha| \leqq m} \|\varphi^{k/2} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$. Si $m - k/2 > 0$, on a $W_m^{k/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte, et $W_m^{k/2}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

De même si on note $\boldsymbol{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \boldsymbol{R}^n, x_n > 0\}$, on utilise les espaces

$$W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+^n) = \{u \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}_+^n), x_n^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n), \text{ pour } |\alpha| \leqq m\}\,.$$

On considère la forme sesquilinéaire: