Tôhoku Math. Journ.
37 (1985), 405-421.

GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES

ALBERTO MEDINA

(Received January 18, 1984, revised October 16, 1984)

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'action co-adjointe de G définit une structure de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ (cf. [11]). Supposons G muni d'une métrique pseudo-riemannienne bi-invariante, c'est à dire, invariante par les translations à gauche et à droite de G. La métrique de G définit un isomorphisme entre les représentations adjointe et co-adjointe de G, par conséquent la variété $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure de Lie-Poisson transportée de $\mathfrak{g}^*$ par cet isomorphisme.

Dans cet article nous étudions des liens entre la structure du groupe G, la nature de la métrique et la structure de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}$ associée à la métrique. Dans ce travail une métrique pseudo-riemannienne est appelée simplement une métrique.

La classe des groupes de Lie qui admettent une métrique bi-invariante est assez large. Dans une publication interne à Montpellier (cf. [6]) nous avons fourni les idées essentielles pour le dévissage de ces groupes. Pour que l'étude qui va suivre soit complète et illustrée par des exemples, nous reprenons ici quelques une des résultats de la référence citée, présentés sous un angle différent.

1. Introduction. Supposons G muni d'une métrique bi-invariante et identifions l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur G.

La métrique de G induit sur $\mathfrak{g}$ une métrique pour laquelle l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ se fait par des isométries. Par conséquent si $(\mathrm{ad}\, a)(b) = [a, b]$ désigne le produit sur $\mathfrak{g}$, pour tout a, b et c dans $\mathfrak{g}$ on a l'identité suivante:

$$(*)\qquad \langle(\mathrm{ad}\, a)(b), c\rangle + \langle b, (\mathrm{ad}\, a)(c)\rangle = 0\ .$$

Réciproquement soit $\langle\ ,\ \rangle$ une métrique sur la variété $\mathfrak{g}$. Si pour tout g dans G, $\mathrm{Ad}(g)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une isométrie alors $\langle\ ,\ \rangle$ définit, par transport suivant les translations à gauche, une métrique sur G; cette métrique qui est invariante à gauche est aussi invariante à droite.

Si la métrique de $\mathfrak{g}$ vérifie seulement (*), elle définit une métrique bi-invariante sur la composante connexe de l'identité de G (2.2). Soit