Tôhoku Math. J.
40 (1988), 549-590.

ÜBER DIE ANALYTISCHE FORTSETZUNG GEWISSER POINCARÉ'SCHER REIHEN ZU ELLIPTISCHEN MODULGRUPPEN

ULRICH CHRISTIAN

(Received May 22, 1987)

0. Einleitung. Es sei Ψ eine Kongruenzgruppe q-ter Stufe zur elliptischen Modulgruppe. Für $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \boldsymbol{R})$ und $z = x + iy$ aus der oberen Halbebene $\mathfrak{Z}(1)$ werde

$$N\langle z\rangle = \frac{az+b}{cz+d} = x_N + iy_N;\ N\{z\} = cz + d$$

gesetzt. Dabei sind x, y der Real- und Imaginärteil von z und x_N, y_N das Entsprechende von $N\langle z\rangle$.

Mit einer weiteren Variablen $w = u + iv \in \mathfrak{Z}(1)$ und $k, g \in \boldsymbol{Z}$; $s_1, s_2 \in \boldsymbol{C}$ bilden wir die Poincaré'sche Reihe

$$K(\Psi, k, g, w, z, s_1, s_2) = \sum_{N \in \Psi} (-\bar{w} + N\langle z\rangle)^{-k}(N\{z\})^{-g}|-\bar{w} + N\langle z\rangle|^{-s_1}|N\{z\}|^{-s_2}\ ,$$

welche für $\operatorname{Re} s_1 > 1 - k$, $\operatorname{Re} s_2 > 2 - g$ absolut konvergiert. In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß sich diese Reihe als Funktion von (s_1, s_2) meromorph auf $\boldsymbol{C}^2$ fortsetzen läßt, und wir werden auch Aussagen machen, wo Singularitäten liegen können.

Diese Reihe ist von besonderem Interesse, weil $K(\Psi, g, g, w, z, 0, 0)$ für $g \geqq 3$ bis auf eine Konstante der Kern der Integralgleichung der Spitzenformen vom Gewicht g ist. Wir werden zeigen, daß dieses auch noch für $g = 2$ richtig bleibt. Für $g = 1$ beweisen wir, daß $K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s)$ bei $s = 0$ einen Pol erster Ordnung besitzt, und daß der Kern der Integralgleichung der Spitzenformen vom Gewicht 1 bis auf eine Konstante durch $\operatorname{Res}_{s=0} K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s)$ gegeben wird.

Zum Beweis betrachten wir den Differentialoperator

$$\Delta_g = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - igy\frac{\partial}{\partial x}\ ,$$

welcher in einem passenden Hilbertraum wesentlich selbstadjungiert ist und sich zu einem selbstadjungierten Operator $\tilde{\Delta}_g$ fortsetzen läßt. Der Resolventenkern von $-\tilde{\Delta}_g$ ist eine Poincaré'sche Reihe $G(\Psi, g, w, z, s)$,