Tôhoku Math. J.
42 (1990), 289–306

SUR LES ESPACES DE STEIN QUASI-COMPACTS EN GEOMETRIE RIGIDE

QING LIU

(Received March 20, 1989, revised March 7, 1990)

Introduction. Les espaces de Stein en géométrie analytique complexe sont caractérisés par le fait que $H^q(X, \mathscr{F})=0$ pour tout $q \geqslant 1$ et pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X ([S1]). En géométrie algébrique, cette condition de nullité des groupes de cohomologie caractérise les variétés affines, c'est le critère de Serre ([S2]). Comme il y a une forte analogie entre la géométrie algébrique et la géométrie analytique rigide, les variétés affines correspondant aux espaces affinoïdes, on peut se demander si l'analogue du critère de Serre est valable en géométrie analytique rigide. C'est-à-dire:

Les espaces affinoïdes sont-ils exactement les espaces analytiques rigides séparés X vérifiant $H^q(X, \mathscr{F})=0$ pour tout $q \geqslant 1$ et pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X (nous appelons un tel espace un espace de Stein)?

Un théorème de Tate et Kiehl montre que les espaces affinoïdes sont de Stein ([K]). L'inverse est faux sans restriction sur X. En effet, Kiehl a introduit et étudié les espaces X (appelés quasi-espaces de Stein) qui admettent un recouvrement admissible affinoïde $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ tel que $X_n \subset X_{n+1}$ et que la restriction $\mathcal{O}_X(X_{n+1}) \to \mathcal{O}_X(X_n)$ soit dense pour tout $n \geqslant 0$ ([K]). Ce sont des espaces de Stein dans le sens défini ci-dessus. Par suite, d'autres auteurs ont approfondi l'étude de ces espaces ([Lüt], [H]). Les quasi-espaces de Stein ne sont pas quasi-compacts (i.e. n'admettent pas de recouvrement admissible affinoïde fini) sauf cas trivial, donc non affinoïde en général. Il est donc clair que pour le problème ci-dessus, il faut au moins supposer X quasi-compact. Avec cette hypothèse supplémentaire, une réponse positive nous semblait très plausible ainsi qu'à divers spécialistes interrogés à ce sujet. Malheureusement, on a trouvé un contre-exemple dans [L]. Cependant, c'est un espace ayant deux composantes irréductibles qui se coupent, donc un espace singulier, et le procédé utilisé ne permet pas de fabriquer de contre-exemple non singulier. La question suivante paraît alors naturelle:

Un espace de Stein quasi-compact régulier est-il affinoïde?

Pour répondre à cette question, nous avons été obligés d'envisager une étude détaillée des espaces de Stein quasi-compacts. On a alors trouvé un critère simple (Théorème 2) pour qu'un espace quasi-compact soit de Stein et qui a permis de construire un contre-exemple à la question ci-dessus (Théorème 4). Ce contre-exemple est un ouvert

---

Ce travail a été réalisé pendant le séjour de l'auteur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques que nous remercions de son hospitalité.