

SYSTÈME GÉNÉRATEUR MINIMAL, DIVISEURS ESSENTIELS ET G -DÉSINGULARISATIONS DE VARIÉTÉS TORIQUES

CATHERINE BOUVIER ET GÉRARD GONZALEZ-SPRINBERG

(Received December 13, 1993, revised May 23, 1994)

Abstract. We give a geometric interpretation of the minimal generating system of the semi-group defined by a rational polyhedral cone in any dimension, via a natural bijection with the set of essential divisors of equivariant desingularizations of the toric variety associated to the cone. We prove, for varieties of dimension three, the existence of a desingularization associated to a regular fan whose edges contain the elements of the minimal generating system, its uniqueness for canonical toric varieties of index at least two, and the uniqueness in general up to flops. We give an example of non-existence of such desingularizations in dimension four.

Introduction. L'étude des variétés algébriques munies de l'action d'un tore, entreprise par Demazure [5] en introduisant les éventails et développée ensuite par beaucoup d'autres pour les variétés singulières, repose sur un dictionnaire entre des objets géométriques et combinatoires. Nous poursuivons cette étude avec une interprétation géométrique du système générateur minimal G du semi-groupe défini par un cône polyédral rationnel σ : il existe une bijection naturelle entre G et les diviseurs essentiels des désingularisations équivariantes de la variété torique V_σ associée à σ sur un corps k , en dimension quelconque (théorème 1.10).

En dimension trois on démontre, en utilisant la théorie de Mori, que les diviseurs essentiels équivariants correspondant aux éléments de G sont aussi essentiels pour toute désingularisation de V_σ , non nécessairement équivariante (théorème 2.5).

On appelle G -désingularisation de V_σ une désingularisation équivariante définie par une subdivision de σ en un éventail dont les arêtes portent les éléments de G (G -subdivision régulière), i.e. telle que tout diviseur exceptionnel soit essentiel.

On démontre, en dimension trois, l'existence des G -désingularisations par une méthode constructive à partir d'un modèle terminal minimal (théorème 2.9), une caractérisation des G -subdivisions régulières par la minimalité de leur volume (proposition 2.12), et le fait que toute G -désingularisation domine un modèle terminal minimal (théorème 2.22). Ce dernier résultat et l'unicité de la G -désingularisation d'une variété torique canonique d'indice > 1 (théorème 2.23) impliquent l'unicité en général

Mots-clés: Variétés toriques, diviseurs essentiels, désingularisations, théorie de Mori, systèmes générateurs de semi-groupes.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14E15; Secondary 14L30, 14J30.