

A.MARQUETTY, Université de METZ, 34, rue Ronsard, 94100 ST-MAUR (FR.)

APPROCHE ALGEBRIQUE DE L'ANALYSE NON STANDARD

1. INTRODUCTION.- L'expression "Analyse non standard" a été inventée en 1961 par A. Robinson [6] (préface). L'intention de Robinson était de remplacer le concept habituel de limite par une théorie des infiniment petits et des infiniments grands en rationalisant ces concepts dont G.W. Leibniz avait pressenti l'intérêt. A partir de définitions non standards des notions de continuité et de dérivée, Robinson présente des démonstrations d'une séduisante simplicité des théorèmes classiques de l'analyse réelle, par exemple du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues [6] (p. 66).

Les techniques de l'analyse non standard ont fourni la preuve de leur efficacité [3], [4] et [5] (p. 140).

Un seul exemple, particulièrement frappant, suffit à justifier l'intérêt de l'analyse non standard :

Dans la théorie non standard de la mesure (voir Allen R. Bernstein et Frank Wattenberg [3]), la mesure de probabilité associée à un point de l'intervalle $[0,1]$ a une valeur infinitésimale et non pas nulle comme c'est le cas en théorie classique de la mesure. Le point de vue non standard est plus conforme à l'intuition que le point de vue classique :

si chaque point de l'intervalle $[0,1]$ a une chance sur une infinité continue de chances d'être choisi, la probabilité associée à ce point est infime mais ne peut pas être nulle, bien qu'étant inférieure à tout nombre réel, si petit soit-il : cette probabilité est infinitésimale.

En dépit de ses promesses, le point de vue non standard ne s'est pas substitué aux procédés classiques d'approche de l'analyse réelle.

Parmi les causes de cet échec relatif, on peut citer le fait que l'analyse non standard est un sous produit de la théorie des modèles, elle-même inspirée par l'étude des systèmes formels. Or, peu de mathématiciens sont sensibles aux motivations qui soutiennent des recherches sur la nature de l'axiome du choix, de l'hypothèse du con-