Real Analysis Exchange, Vol. 8 (1982-83)

Zbigniew Grande, Department of Mathematics, Higher Pedagogical School Bydgoszcz, Poland

La mesurabilité des fonctions de plusieurs variables.

Dans cette communication je présenterai quelques nouvelles conditions suffisantes pour la mesurabilité des fonctions de deux variables et quelques exemples montrant que les hypothèses dans ces théorèmes sont essentielles.

Définition 1. On dit qu'une fonction $f: R \longrightarrow R$ mesurable(L) (au sens de Lebesgue) est non dégénérée [non dégénérée positivement] au point $x_0 \in R$ lorsque la densité supérieure [la densité inférieure] de l'ensemble $f^{-1}(U)$ au point x_0 est positive, quel que soit l'ensemble ouvert U contenant $f(x_0)$.

Pour une fonction quelconque $F: R \times R \longrightarrow R$ posons $F_x(t) = F(x,t)$ et $F^y(t) = F(t,y)$ (les coupes de F). Soient $A(f)$ $[B(f)]$ l'ensemble des points (x,y) tels que F_x n'est pas non dégénérée positivement [n'est pas non dégénérée] au point y ou bien F^y n'est pas non dégénérée au point x. Désignons par m_2 la mesure plane de Lebesgue.

Théorème 1. Soit $F: R \times R \rightarrow R$ une fonction telle que toutes ses coupes F_x et F^y sont mesurables (L). Pour que la fonction F soit mesurable (L) il faut et il suffit que $m_2(A(f)) = 0$.

Exemple 1. Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F: R \times R \longrightarrow R$ non mesurable (L) et telle que toutes ses coupes F_x et F^y sont mesurables (L) et non dégénérées en tout point $x \in R$.