THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 75, Number 2, June 2010

ESPACES VECTORIELS C-MINIMAUX

FARES MAALOUF

§1. Introduction. Dans [2], Salma et Franz Viktor Kuhlmann définissent plusieurs notions d'espace vectoriel valué et démontrent un principe d'Ax-Kochen pour celles de ces structures dans lesquelles la multiplication par un scalaire du corps préserve la valuation. Nous travaillons ici avec des conditions plus faibles. On va définir en premier lieu la notion d'espace vectoriel valué sur un corps K, et associer canoniquement à un tel espace une valuation sur K, notée w, compatible en un sens à préciser avec celle de l'espace vectoriel. Ceci va nous permettre de parler de (K, w)-espaces vectoriels valués pour tout corps valué (K, w) (definition 24). Le cas où (K, w) est trivialement valué correspond exactement à la condition de [2] de préservation de la valuation par la multiplication par un scalaire. On fixe un corps K. Les espaces vectoriels valués sur le corps K vont être traités comme des structures à deux sortes : la sorte de l'espace vectoriel et celle de l'espace des valuations. Le langage $\mathscr{L}_E$ de la sorte de l'espace vectoriel contient le symbole de la somme, celui de l'élément neutre, et un symbole de fonction unaire pour chaque scalaire de K. Le langage $\mathscr{L}_V$ de l'espace des valuations contient une relation d'ordre total, un symbole de fonction unaire pour la multiplication par chaque scalaire de K, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un symbole de prédicat R_n contrôlant la cardinalité résiduelle. $\mathscr{L}_V$ contient aussi un symbole de fonction unaire s qui sera la fonction successeur quand elle est définie et l'identité sinon. Le langage contient aussi un symbole v de fonction unaire, la valuation, qui va de la sorte de l'espace vectoriel dans la sorte de l'espace des valuations. Dans la section 2, on va étudier les différentes théories possibles de l'espace des valuations d'un espace vectoriel valué C-minimal sur un corps non trivialement valué. Les théorèmes 13 et 15 axiomatisent ces théories. Dans la section 3, on va définir les notions de "K-espace vectoriel valué" où K est un corps(définition 21), et de "(K, w)-espace vectoriel valué" où (K, w) est un corps valué(définition 24). On montre que la théorie d'un (K, w)-espace vectoriel valué (E, v) est codée dans celle de son espace des valuations $v(E)$ dans le langage $\mathscr{L}_V$, au sens suivant :

THÉORÈME 1. *Soient (E, v) et (E', v') deux (K, w)-espaces vectoriels valués. Alors $(E, v) \equiv (E', v')$ si et seulement si leurs espaces des valuations respectifs, $v(E)$ et $v'(E')$, sont élémentairement équivalents. De plus, (E, v) est C-minimal si et seulement si son espace de valuations est o-minimal.*

Received January 26, 2009.

1943-5886/10/7502-0015/$2.80