THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 75, Number 1, March 2010

GROUPS OF SMALL CANTOR RANK

BRUNO POIZAT

dédié à Gregory Cherlin à l'occasion
de son soixantième anniversaire

Les groupes de rang de Morley fini satisfont des conditions extraordinairement favorables d'additivité et de définissabilité du rang, ainsi que des propriétés de généricité optimales, et pourtant leur étude pose des problèmes sérieux dès le rang trois, comme il a été montré dans un célèbre article de Gregory Cherlin [Cherlin, 1979]. Nous allons ici étendre les résultats de Cherlin au contexte plus acrobatique du rang de Cantor ; il nous faudra remplacer les arguments reposant sur des propriétés générales du rang de Morley par des considérations ad hoc, qui ne fonctionnent que parce que les petits rangs ne laissent pas beaucoup de place, et les arguments de généricité, qui reposent en dernière analyse sur la symétrie de la déviation, par des propriétés de symétrie spécifiques aux ensembles auxquels ils sont appliqués. Nous invitons notre lecteur à considérer cet article, qui ne fait que démontrer péniblement des résultats d'intérêt anecdotique, comme une méditation sur la force cachée des axiomes introduits dans la préface de [Poizat, 1987].

§1. Généralités sur les structures de rang de Cantor fini. Soit M une structure quelconque ; nous considérons l'ensemble de ses parties définissables avec paramètres dans M ; le rang de Cantor de l'une d'entre elles est défini par l'induction suivante : $rg(X) \geq 0$ si X n'est pas vide ; $rg(X) \geq r + 1$ si on peut trouver une infinité $X_0, X_1, \dots X_m, \dots$ de sous-ensembles de X définissables, deux-à-deux disjoints, tous de rang supérieur ou égal à r. Dans cet article, nous faisons l'hypothèse que ce processus de découpages itérés s'arrête au bout d'un nombre fini de pas quel que soit l'ensemble X, c'est-à-dire qu'il existe r tel que $rg(X)$ ne soit pas supérieur à $r + 1$: le plus petit de ces r est appelé rang de Cantor de X.

Autrement dit l'ensemble M lui-même est de rang de Cantor fini ; ce rang de Cantor correspond au rang de dérivation dans l'espace des types $S_1(M)$.

Si la structure M est ω-saturée, le rang de Cantor est le rang de Morley, ce que nous ne supposons pas : notre hypothèse n'implique pas que les extensions élémentaires de M aient aussi un rang de Cantor fini ; elle ne garantit ni la stabilité de M, ni l'existence d'un rang de Cantor sur les parties définissables de ses puissances cartésiennes.

Received November 19, 2008.

1943-5886/10/7501-0020/$1.90