THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 67, Number 2, June 2002

MULTIPLICATION COMPLEXE ET ÉQUIVALENCE ÉLÉMENTAIRE DANS LE LANGAGE DES CORPS

(COMPLEX MULTIPLICATION AND ELEMENTARY EQUIVALENCE IN THE LANGUAGE OF FIELDS)

XAVIER VIDAUX

Abstract. Let K and K' be two elliptic fields with complex multiplication over an algebraically closed field k of characteristic 0, non k-isomorphic, and let C and C' be two curves with respectively K and K' as function fields. We prove that if the endomorphism rings of the curves are not isomorphic then K and K' are not elementarily equivalent in the language of fields expanded with a constant symbol (the modular invariant). This theorem is an analogue of a theorem from David A. Pierce in the language of k-algebras.

Résumé. Soit K et K' deux corps elliptiques avec multiplication complexe sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0, non k-isomorphes, et soit C et C' deux courbes ayant pour corps de fonctions K et K' respectivement. Nous démontrons que si les anneaux d'endomorphismes de C et de C' ne sont pas isomorphes, alors K et K' ne sont pas élémentairement équivalents dans le langage des corps enrichi d'une seule constante (l'invariant modulaire). Ce travail fait suite à un travail de David A. Pierce qui se place dans le langage des k-algèbres.

§1. Contexte et notations. Nous considérons un corps algébriquement clos k. Un *corps de courbe sur* k est une extension finiment engendrée de degré de transcendance 1 sur k. Pour tout sous-ensemble A de k, $\mathscr{L}(A)$ désigne le langage des corps enrichi de symboles de constantes pour les éléments de A. Dans [3], Jean-Louis Duret propose les deux conjectures, très liées, suivantes :

(C1) *Soit K un corps de courbe sur k. Il existe un sous-ensemble fini A de k tel que tout corps de courbe sur k élémentairement équivalent à K dans le langage $\mathscr{L}(A)$ lui est k-isomorphe.*

(C2) *Deux corps de courbe sur k sont élémentairement équivalents dans le langage des corps si et seulement s'ils sont isomorphes.*

Les courbes se classent en géométrie algébrique à équivalence birationnelle près. Les conjectures affirment que la classification des corps de courbes à équivalence élémentaire près correspond à la classification de la géométrie algébrique. On peut rapprocher de ce travail l'article [1], où les auteurs étudient si l'élémentaire équivalence des anneaux de fonctions analytiques sur différents domaines entraîne l'isomorphisme de ces domaines.

J.-L. Duret (voir [3]) a prouvé les deux conjectures lorsque K est un corps de courbe de genre différent de 1, quelque soit la caractéristique de k, et, si la caractéristique de k est 0, lorsque le corps K est de genre 1 et sans multiplication complexe. L'objet de cet article est d'étudier la conjecture (C1) dans le cas où

Received March 1, 2000; revised February 13, 2001.

0022-4812/02/6702-0010/$2.40