THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 67, Number 1, March 2002

LA LIMITE DES THEORIES DE COURBES GENERIQUES

OLIVIER CHAPUIS, EHUD HRUSHOVSKI, PASCAL KOIRAN, ET BRUNO POIZAT

Resumo. Ne estas prima orda formulo, kiu definas la Zariskijajn ŝlositojn inter la konstruitoj, malpli ke la konektojn inter la ŝlositoj.

Introduction. Pour paraphraser [SHM 1984] : les questions résolues dans cet article ont été posées par le premier et le troisième auteurs ; pour ce qui est de la solution, la lumière est venue du second ; quant au quatrième, il s'est chargé des détails techniques et de la rédaction, sous l'attention vigilante des trois autres.

Nous parlons ici de la possibilité d'exprimer certaines propriétés par des formules du premier ordre. Voilà ce que ça signifie : on considère une structure M, un entier m, et un énoncé $\varphi(R)$ usuel, c'est-à-dire finitiste et du premier ordre (il ne quantifie que des *éléments* de M), dans le langage de M augmenté d'un symbole R de relation m-aire. Etant donné un ensemble X de parties de M^m, on dit que le sous-ensemble Y de X est défini à l'intérieur de X par l'énoncé $\varphi(R)$ si Y est précisément formé des éléments A de X pour lesquels cet énoncé devient vrai dans M quand on y interprète le symbole R par la relation A.

Par exemple, dans un corps réel-clos K, les parties fermées de K^m sont caractérisées par une propriété évidente du premier ordre. Par contre, nous verrons ici que, si K est algébriquement clos, il est impossible de définir par un énoncé du premier ordre les fermés de Zariski, même parmi les ensembles définissables, dès que $m \geq 2$: c'est la réponse à une question posée dans [CHAPUIS-KOIRAN 1999].

Outre l'intérêt proprement modèle-théorique attaché à la caractérisation des fermés de Zariski parmi les constructibles (c'est-à-dire les ensembles définissables dans un corps algébriquement clos), ce type de questions a des motivations en Complexité algébrique : quand on travaille en Géométrie réelle ou complexe, et qu'on se pose la question de savoir si un ensemble défini par une formule $\rho(\underline{x})$ possède une certaine propriété P, si jamais cette propriété, pour un ensemble définissable, s'exprime au premier ordre par $\varphi(R)$, on obtient un algorithme de décision en substituant ρ à R et en éliminant les quanteurs ! D'ailleurs, cette simplicité algorithmique des propriétés exprimables au premier ordre fait qu'elles ont été intensément étudiées par les spécialistes des bases de données, qui traduiraient nos résultats en termes de bases de données géographiques avec contraintes dans un corps algébriquement

Received November 25, 1999; revised February 14, 2000.
Les recherches du deuxième auteur ont été soutenues par la Fondation Scientifique d'Israel.

0022-4812/02/6701-0002/$2.10