Hokkaido Mathematical Journal Vol. 9 (1980) p. 155-174

Die κ-Elemente von $\mathrm{Ext}_R^1(C, R^n)$

von

Helmut ZÖSCHINGER

(Received January 12, 1979)

Einleitung. Ziel dieser Arbeit ist es, über einem diskreten Bewertungsring R die *κ-Elemente* von $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ zu untersuchen, d. h. die Äquivalenzklassen von kurzen exakten Folgen $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$, bei denen die Menge $\{V \subset B \mid V + \mathrm{Bi}\,\alpha = B\}$ ein minimales Element hat, ein sogenanntes *Komplement* von Bi α in B. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn C teilbar ist, jedes Torsionselement in $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ ein κ-Element ist. Für beliebiges C ist das nicht mehr richtig, aber unter der Einschränkung, daß A *koatomar*, d. h. direkte Summe aus einem endlich erzeugten und einem beschränkten Modul ist, können wir die präzisen Bedingungen angeben:

SATZ A. *Ist A koatomar, so sind für einen Modul C äquivalent*:

(i) *In* $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *ist jedes Torsionselement ein κ-Element.*

(ii) *Die induzierte Abbildung* $\pi^*: \mathrm{Ext}_R^1(C/Ra(C), A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *erhält κ-Elemente.*

(iii) *Falls p-Rang$(T(C)) < p$-Rang$(A/T(A))$, ist C koseparabel.*

Die in (iii) auftretende Verallgemeinerung der Teilbarkeit wurde von Griffith in [3] eingeführt: Ein Modul C heißt *koseparabel*, wenn es zu jedem Untermodul U von C, mit C/U endlich erzeugt, ein $U' \subset U$ gibt, so daß U' direkter Summand in C ist und C/U' immer noch endlich erzeugt. — Den Extremfall, daß $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nur aus κ-Elementen besteht, können wir bei vollständigem R sogar für jedes Paar (A, C) lösen. Im unvollständigen, uns interessierenden Fall gilt:

SATZ B. *Ist R unvollständig und A koatomar, so sind für einen Modul C äquivalent*:

(i) $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *besteht nur aus κ-Elementen.*

(ii) *Falls p-Rang$(T(C)) < p$-Rang$(A/T(A))$, ist* $\mathrm{Ext}_R^1(C/T(C), A) = 0$; *falls sogar p-Rang$(T(C)) < p$-Rang$(A/T(A)) - 1$, muß zusätzlich $T(C)$ endlich erzeugt sein.*

Schließlich hängt die Frage, wann es in $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nur κ-Elemente gibt, eng mit dem Problem zusammen, wann ein Untermodul U von M *genügend*