Michigan Math. J. 61 (2012), 615–630

Invariants de Hasse–Witt des Réductions de Certaines Variétés Symplectiques Irréductibles

Stéphane Druel

1. Introduction

On définit *l'invariant de Hasse–Witt* d'une variété algébrique X projective et lisse sur un corps parfait de caractéristique > 0 comme le rang stable du Frobenius absolu agissant sur $\mathrm{H}^{\dim(X)}(X, \mathcal{O}_X)$. On étudie dans cette note la question suivante (voir [BoZ; MuSr, Conj. 1.1]).

Conjecture 1. *Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Soit X une K-variété projective lisse. Soient $f : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ un modèle entier de X et $\mathcal{V}$ un ensemble fini de places non archimédiennes de K tel que f soit lisse au-dessus de l'ouvert $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathcal{V}^{-1}])$ de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Il existe alors un ensemble Σ de places finies de K de densité > 0 tel que pour tout $v \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$ l'invariant de Hasse–Witt de $\mathcal{X}_v$ soit maximal.*

On étudie le cas *a priori* le plus simple : on suppose $\det(\Omega^1_X) \simeq \mathcal{O}_X$. On sait, d'après le théorème de décomposition de Bogomolov (voir [B, Thm. 1]), que toute variété (lisse) complexe compacte Kählérienne avec $c_1(X) = 0 \in \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbf{C})$ est à un revêtement étale fini et à un isomorphisme près un produit $T \times \prod_{i \in I} Y_i \times \prod_{j \in J} Z_j$ où

- T est un tore complexe,
- Y_i est une variété de *Calabi–Yau*, c'est-à-dire, Y_i est projective, simplement connexe (de dimension ≥ 3) et $\mathrm{H}^0(Y_i, \Omega^\bullet_{Y_i}) = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}\omega_i$ où ω_i est une forme différentielle de degré $\dim(Y_i)$ partout non nulle,
- Z_j est *symplectique irréductible,* c'est-à-dire, Z_j est simplement connexe et $\mathrm{H}^0(Z_j, \Omega^\bullet_{Z_j}) = \mathbf{C}[\varphi_j]$ où φ_j est une 2-forme partout non dégénérée.

On a très peu d'exemples de variétés symplectiques irréductibles. Beauville a constuit deux familles de variétés symplectiques (irréductibles) de dimension $2m$ (pour tout entier $m \geq 1$) : l'une est (à déformation près) le schéma de Hilbert “des points” $S^{[m]}$ d'une surface $K3$ S [B, Thm. 3] et l'autre est (à nouveau à déformation près) la varitété de Kummer généralisée $K_m(A)$ d'une surface abélienne A qui par définition est la fibre au-dessus de 0 du morphisme d'Albanese de $A^{[m+1]}$ [B, Thm. 4]. O'Grady a construit deux autres familles d'exemples : l'une une famille de variétés de dimension 10 [O'G1] et deuxième nombre de Betti égal à 24 [Rap]

Received March 15, 2011. Revision received August 11, 2011.