Les Domaines de Carleson

MICHEL ZINSMEISTER

1. Introduction

Si Ω est un domaine simplement connexe du plan, soit $\Delta(\Omega)$ l'espace des *mesures de Carleson généralisées* sur Ω, c'est à dire l'ensemble des mesures μ définies sur Ω pour lesquelles

$$\|\mu\| = \sup_{z \in \partial\Omega,\, r>0} \frac{1}{r} |\mu|(D(z,r)) < +\infty$$

où $D(z,r)$ est le disque fermé de centre z et de rayon r (dans la suite nous noterons également $D = D(0,1)$).

Un célèbre théorème de Carleson [1] affirme que si $\mu \in \Delta(D)$, alors

$$\iint_D |f(z)|\, |d\mu(z)| \leq C\|\mu\|\, \|f\|_1$$

pour toute fonction f appartenant à l'espace de Hardy $H^1(D)$. L'objet de cet article est l'analogue de ce théorème dans des domaines de Jordan généraux.

Examinons tout d'abord le cas d'un domaine de Jordan à bord rectifiable. Soit Ω un tel domaine et $\varphi : D \to \Omega$ une représentation conforme. On définit alors l'espace de Hardy

$$H^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{C};\, f\circ\varphi\varphi' \in H^1(D)\}.$$

Il est facile de voir que cette définition est indépendante de la représentation conforme choisie et l'on peut poser

$$\|f\|_1 = \|f\circ\varphi\varphi'\|_1 = \int_{\partial\Omega} |f(z)|\, |dz|.$$

L'espace $H^1(\Omega)$, muni de cette norme, est un espace de Banach [3]. On dira que Ω est un *domaine de Carleson* s'il existe $C > 0$ telle que pour toute mesure $\mu \in \Delta(\Omega)$,

$$\iint_\Omega |f(z)|\, |d\mu(z)| \leq C\|\mu\|\, \|f\|_1, \quad f \in H^1(\Omega).$$

Le changement de variable $z = \varphi(\zeta)$ donne

$$\iint_\Omega |f(z)|\, |d\mu(z)| = \iint_D |f\circ\varphi(\zeta)\varphi'(\zeta)|\, |d\nu(\zeta)|$$

Received July 8, 1988. Revision received October 24, 1988.
Michigan Math. J. 36 (1989).