Michigan Math. J. 55 (2007)

Sur le Sous-Groupe de Décomposition d'une Courbe Irrationnelle dans le Groupe de Cremona du Plan

Ivan Pan

A la mémoire de Felice Ronga

1. Introduction

On désigne par $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le plan projectif sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$ le groupe des transformations de Cremona sur le plan projectif et $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible non rationnelle; notons $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ *le sous-groupe de décomposition* de C dans $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C := \{F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2) : F(C) = C\};$$

cette notion a été introduite par M. H. Gizatullin, dans un contexte général, dans [Gi] (comme Gizatullin explique dans l'Exemple 1 de cet article, cette terminologie est inspirée de la théorie de Galois; voir [Z, Chap. 5, Sec. 10]). On dira que F *stabilise* C si $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$.

Observons que la classe d'équivalence birationnelle d'une courbe non rationnelle C est un invariant (par conjugaison) de tout élément de $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$. Le but de ce travail est de donner des renseignements sur le groupe $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ et ses éléments dans les cas où C est lisse ou elle est singulière avec normalisation de genre $>$ 1. Ce sujet a été traité classiquement, par exemple dans [C1; Coo, Book IV; Go; Cob, Chap. I]; des références précises seront données au fur et à mesure que l'on développera le travail.

Considérons les exemples suivants; on note PGL(3) le groupe des automorphismes du plan.

Exemple 1.1. Soit C une cubique lisse et $p, q, r \in C$ trois points non alignés. Si F est une transformation quadratique standard définie par le choix d'une base ordonnée du système linéaire des coniques par p, q, r, on constate que $F(C)$ est une cubique lisse isomorphe à C. Si $\varphi \in \mathrm{PGL}(3)$ est un isomorphisme linéaire qui envoie $F(C)$ sur C, on a $\varphi \circ F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$; une droite que relie deux points de $\{p, q, r\}$ est collapsée par celle-ci sur un point de C, donc les points-base de son inverse sont aussi sur C (cf. Théorème 1.3). On appelera une telle transformation une *transformation quadratique C-générique*. Observons qu'alors $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ est infini non dénombrable, car p, q, r sont arbitraires.

Received May 10, 2006. Revision received October 23, 2006.
Partiellement soutenu par le CNPq-Brasil.