Michigan Math. J. 48 (2000)

L'algèbre de Cohomologie du Complément, dans un Espace Affine, d'une Famille Finie de Sous-espaces Affines

P. Deligne, M. Goresky, & R. MacPherson

This paper is dedicated to W. Fulton in admiration for his mathematical achievements and his broad influence on the field of algebraic geometry

0. Introduction

Soit X le complément dans un espace affine réel V d'un ensemble localement fini E de sous-espaces affines propres de V. Les *plats* de E sont V et les intersections non vides d'éléments de E. Dans [GM] (part III), Goresky et MacPherson appliquent la théorie de Morse à une fonction "distance à $v_0 \in V$" pour (a) décomposer l'homologie de X en facteurs indexés par les plats et (b) donner une description combinatorie de chaque facteur. Au §1, nous retrouvons ces résultats par des techniques faisceautiques. Elles mettent en évidence de quoi dépend la décomposition de [GM], et s'appliquent aussi à la détermination de la cohomologie ℓ-adique du complément d'une famille finie de sous-espaces affines dans un espace affine sur un corps algébriquement clos.

Par dualité, ces résultats en homologie se transposent en cohomologie. Pour E fini, on a une décomposition indexée par les plats

$$H^*(X) = \bigoplus h^*(A). \tag{0.1}$$

Soit $\operatorname{coor}(A)$ le $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1, de bases $\pm e$ les coorientations de A dans V, et mettons-le en degré $\operatorname{codim}(A)$: on a

$$\operatorname{coor}(A) = H^*_A(V, \mathbb{Z}). \tag{0.2}$$

Le facteur direct $h^*(A)$ est le produit tensoriel de $\operatorname{coor}(A)$ par un groupe ne dépendant que de la combinatoire de l'arrangement, i.e., que de l'ensemble $\mathcal{A}^+$ des plats, ordonné par inclusion. La décomposition (0.1) dépend du choix pour chaque plat A d'un point

$$x_A \in A^0 := A - \bigcup \{\text{plats plus petits}\}.$$

Seule importe la composante connexe de A^0 où se trouve x_A. En particulier, si l'hypothèse de connexité (CONN) suivante est vérifiée, la décomposition (0.1) ne dépend d'aucun choix.

$$\begin{gathered}\text{Si un plat } B \text{ est contenu dans un plat } A,\\ A = B \text{ ou } \dim(A) - \dim(B) \geq 2.\end{gathered} \tag{CONN}$$

Received December 7, 1999. Revision received March 29, 2000.
The second author was partially supported by NSF Grant no. 9900324.