Bornes pour les Degrés et les Hauteurs dans le Problème de Division

M. ELKADI

1. Introduction

Soient $P_1, \dots, P_m, Q$ $(m+1)$-polynômes à n variables, avec Q appartenant à l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_m$. Une question légitime est la suivante: comment peut-on écrire explicitement Q sous la forme $A_1P_1 + \dots + A_mP_m$?

La théorie de l'élimination donne une borne en $\deg Q + 2(2D)^{2^{n-1}}$ pour les degrés des polynômes A_i, où $D = \max\{\deg P_i, 1 \leq i \leq m\}$ [He; MW]. En général, une telle borne est inévitable comme le montre l'exemple de Mayr–Meyer [MM]. Dans le cas où les homogénéisés de $P_1, \dots, P_m$ forment une intersection complète dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, un ancien résultat de Macaulay donne une borne en $\deg Q + D^m$ [Mc]. Plus récemment, Berenstein et Yger ont trouvé, lorsque $P_1, \dots, P_m$ est une intersection complète dans $\mathbf{C}^n$, en utilisant des méthodes analytiques centrées autour des techniques de cohomologie du $\bar{\partial}$ à croissance, une borne en $\deg Q + \kappa(m,n)D^m$, où $\kappa(m,n)$ est une constante qui ne dépend que de n et m [BY1].

Ces résultats ont été mieux compris du point de vue de la géométrie algébrique depuis le travail de Kollár [Ko] et la relecture qu'en a proposé Philippon [P1]. La clef de l'existence de bornes en D^m pour le problème de l'appartenance à l'idéal dans le cas des suites régulières réside comme on pouvait s'y attendre dans le théorème de Bezout (voir, par exemple, [Ha, p. 54]), même si celui-ci ne suffit pas à expliquer la manière dont Kollár se débarrasse du problème que peuvent créer les composantes immergées.

Il existe depuis quelques années plusieurs travaux dirigés vers la recherche d'un théorème de Bezout arithmétique. Il s'agit d'une part de construire une bonne notion de hauteur h pour les schémas arithmétiques (plus concrètement pour ce qui nous intéresse, les variétés algébriques définies par des polynômes à coefficients entiers), d'autre part de savoir majorer correctement $h(X \cap Y)$ en terme des hauteurs $h(X), h(Y)$ et des degrés $\deg(X), \deg(Y)$ lorsque X et Y sont deux schémas se coupant proprement. Une première version d'un tel résultat résulte des travaux de Gillet–Soulé [GS], Faltings [Fa], et on trouvera un énoncé dans [BGS].

Signalons que le problème de la recherche d'un dénominateur dans l'identité de Bezout, lorsque l'on veut la résoudre pour des polynômes dont les

Received May 7, 1992.
Michigan Math. J. 40 (1993).