Michigan Math. J. 49 (2001)

Fibrés Affines

Aristide Tsemo

Introduction

On étudie les applications affines entre variétés affines, en particulier les fibrés affines: ce sont les applications affines surjectives. La classification des applications affines est envisageable si on suppose que les fibres sont au moins homéomorphes entre elles. C'est par exemple le cas si l'espace source de l'application est une variété affine compacte. Voici un exemple qui montre que la situation peut être beaucoup plus compliquée. Considérons une surjection de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$, sur chaque fibre de la surjection, enlevons un sous-ensemble, on obtient ainsi une application affine, telle que les structures topologiques de deux fibres distinctes peuvent être très différentes. Il est donc difficile d'aborder le problème de classification dans toute sa généralité, car on ne peut pas préciser les données à partir desquelles se fera la classification. Dans les cas que nous considérons, les fibres d'un fibré affine sont des variétés différentiables, deux à deux homéomorphes, dont les structures affines peuvent être différentes bien qu'elles aient la même holonomie linéaire.

Si le second groupe d'homotopie de la base d'un fibré affine à espace total compact est nul (c'est le cas si elle est complète), la suite exacte de Serre montre que le groupe fondamental de l'espace total $\pi_1(M)$, est une extension de celui de la base $\pi_1(B)$, par celui de la fibre $\pi_1(F)$.

Posons $\mathbb{R}^{m+l} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^l$, et notons $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ le sous-groupe des automorphismes affines de $\mathbb{R}^{m+l}$ dont la partie linéaire fixe $\mathbb{R}^l$, et s la surjection canonique de $\mathbb{R}^{m+l}$ dans $\mathbb{R}^m$. Il existe une application: $s' \colon \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$, $\gamma \mapsto s'(\gamma)(x) := s(\gamma(x, 0))$. Notons $\mathrm{Aff}_I(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ qui se projette sur $\mathbb{R}^m$ en l'identité.

On en déduit le problème algébrique suivant analogue au notre: étant donnés deux groupes $\pi_1(B)$ et $\pi_1(F)$, deux représentations affines respectivement de $\pi_1(B)$ dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$, et de $\pi_1(F)$ dans $\mathrm{Aff}_I(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$. Classifier tous les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(F) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \pi_1(B) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{Aff}_I(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

Received October 9, 2000. Revision received May 9, 2001.