Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XII, Number 4, October 1971
NDJFAM

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE PRÉSERVATION

JEAN DRABBE

1. *Introduction.* Une formule d'un langage du premier ordre est dite *positive* si elle peut être construite à partir des formules atomiques à l'aide de la conjonction, de la disjonction, de quantifications universelles et de quantifications existentielles. Une formule est dite *négative* si elle est la négation d'une formule positive. Nous utiliserons la terminologie de [1] (à une traduction près) et la convention de nous limiter à la considération de structures et de langages du premier ordre. Nous nous proposons d'étudier le problème suivant:

Quand une formule a-t-elle la propriété d'être valide dans un produit sous-direct de structures chaque fois qu'elle est valide dans au moins une composante de ce produit sous-direct?

Nous montrerons que les formules répondant au problème sont les formules équivalentes à une formule négative et les théorèmes logiques.

2. *Un premier théorème.* Nous pouvons convenir de ne pas prendre en considération les sous-produits directs d'un ensemble vide de structures. Remarquons que les formules négatives répondent au problème car si $\sim P$ (où P est positive) n'est pas valide dans un produit sous-direct, alors $\sim P$ n'est valide dans aucune de ses composantes (voir [2], chapitre 5, exercices 7 et 8). Notons K une théorie du premier ordre et K' la théorie du premier ordre dont les axiomes sont les formules négatives démontrables dans K et les théorèmes logiques de K.

Théorème 1. *Une structure $\mathfrak{A}$ est un modèle de K' si et seulement si il existe une extension élémentaire $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ qui est un produit sous-direct de structures dont l'une au moins est un modèle de K.*

Démonstration: Supposons que $\mathfrak{A}$ est un modèle de K'. Nous devons prouver qu'il existe une extension élémentaire $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ satisfaisant à la condition indiquée (l'autre partie de l'énoncé est triviale, en vertu de la remarque précédente).

Montrons qu'il existe un homomorphisme positif (voir la définition

Received September 13, 1970