Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XV, Number 2, April 1974
NDJFAM

ÜBER EINE ERWEITERUNG DER ALGEBRAISCHEN OPERATIONEN

GÜNTHER FREI-IMFELD

1 Einleitung* Es ist bekannt, wie man mit Hilfe der Nachfolgeroperation die Addition, die Multiplikation und die Potenz für natürliche Zahlen definiert. Dem liegt zu Grunde, daß die Addition eine iterierte Nachfolgeroperation, die Multiplikation eine iterierte Addition und die Potenz eine iterierte Multiplikation ist (Ausführen derselben Operation eine gewisse Anzahl von Malen hintereinander). Die Nachfolgeroperation induziert überdies auf der Menge der natürlichen Zahlen eine Ordnung, die sich in bestimmter Weise auch auf die 3 Operationen überträgt. Schon früh hat sich die Frage gestellt nach der Umkehrung dieser Operationen und der Erweiterung der natürlichen Zahlen zu einem Bereich, in welchem die Umkehroperationen uneingeschränkt (eventuell mit vereinzelten Ausnahmen) ausführbar sind. Auf bekannte Weise konstruiert man mit Hilfe von Aequivalenzklassen zur Addition die negativen Zahlen und zur Multiplikation die rationalen Zahlen, so daß die Umkehroperationen der Addition und Multiplikation im neuen Bereiche uneingeschränkt ausführbar werden. Diese Konstruktion beruht ganz wesentlich auf der Kommutativität und Assoziativität von Addition und Multiplikation, welches erstere Gesetz auch dafür verantwortlich ist, daß Addition und Multiplikation je nur eine Umkehroperation besitzen. Das Fehlen der Kommutativität und auch der Assoziativität für die Potenz erlaubt dieselbe Konstruktion für die beiden Umkehroperationen der Potenz, das Radizieren und das Logarithmieren, nicht mehr. Um nun das Radizieren und Logarithmieren allgemein durchzusetzen, verließ man den eingeschlagenen algebraischen Pfad und griff zu einem "Gewaltmittel", der Konstruktion der reellen Zahlen. Das der Konstruktion der reellen Zahlen zu Grunde liegende Prinzip ist eigentlich ein "geometrisches" und der Algebra fremd (und beruht auf der Erkenntnis der Griechen, daß die "Menge der Strecken viel größer ist als

*Teile der Arbeit wurden gefördert durch NRC Grant Nr. A 7842.

Received July 1, 1972