

L'AXIOME DU CHOIX

WACŁAW SIERPIŃSKI

EDITORIAL REMARK: The Author delivered this lecture at a Mathematical Colloquium of Department of Mathematics at the University of Notre Dame on May 24, 1965.

En 1907 Ernst Zermelo énonça un axiome, appelé l'axiome du choix qui a provoqué un vif échange d'opinions entre les mathématiciens. C'est l'axiome suivant:

F étant une famille d'ensembles non vides sans éléments communs deux à deux, il existe au moins un ensemble *N* contenant un et un seul élément de chaque ensemble de la famille *F*. (Voir *Mathematische Annalen* 65 (1908), p. 266, Axiom VI).

Il y avait des mathématiciens, même éminents, qui affirmaient qu'ils ne comprennent pas ce qui exprime cet axiome. La raison des difficultés de comprendre l'axiome de Zermelo est celle que le sens des mots "exister" et "ensemble" n'est pas bien précisé. Pour mieux comprendre les difficultés qu'on y rencontre prenons un simple exemple. Soient donnés trois ensembles de points: E_1 , E_2 et E_3 non vides et sans points communs deux à deux. Vu que l'ensemble E_1 n'est pas vide, nous pouvons choisir un élément a_1 de cet ensemble. Pareillement nous pouvons choisir un élément a_2 de l'ensemble E_2 et un élément a_3 de l'ensemble E_3 . L'ensemble *N* formé de ces trois éléments a_1 , a_2 et a_3 sera évidemment celui dont il s'agit dans l'axiome de Zermelo. Évidemment, si un au moins des ensembles E_1 , E_2 , E_3 a plus qu'un élément, il existe plus que un ensemble *N* satisfaisant à l'axiome de Zermelo. La chose semble donc être si simple qu'on pourrait s'étonner qu'ils peuvent être ici quelques doutes. Or, supposons que au lieu de trois ensembles E_1 , E_2 , E_3 nous avons une suite infinie d'ensembles E_1 , E_2 , ..., E_n , ... non vides et sans éléments communs deux à deux. Comment peut-on obtenir l'ensemble contenant un et un seul élément de chacun des ensembles E_n (où $n = 1, 2, \dots$)? Pouvons nous dire: choisissons un élément a_1 , de l'ensemble E_1 , ensuite un élément a_2 de l'ensemble E_2 , et ainsi de suite, et l'ensemble *N* formé de tous les éléments a_1 , a_2 , ... sera celui dont il s'agit dans l'axiome de Zermelo? Est-il possible de repeter un choix une infinité de fois? *N'* exige pas ça un temps

Received May 25, 1965