Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume VII, Number 1, January 1966

SUR LES CONDITIONS QUI PERMETTENT D'UTILISER LES MATRICES RUSSELLIENNES DES ANTINOMIES (1905) POUR EXPRIMER LES THÉORÈMES DE LIMITATIONS INTERNES DES FORMALISMES

JULES VUILLEMIN

§1. *Simplification de la matrice de l'antinomie. Forme de cette matrice chez Carnap.*

Peut-on simplifier la matrice de l'antinomie, telle que Russell la formule en 1905? On considèrera successivement les deux cas des antinomies logiques et des antinomies sémantiques.

I. La forme (A) des antinomies logiques peut être réduite à la forme (B), des qu'on abandonne l'idée de solutions alternatives[1]. De plus, la forme (A) correspond aux antinomies proprement mathématiques (paradoxe de Cantor et paradoxe de Burali-Forti), tandis la forme (B) convient à l'expression des antinomies proprement logiques. Les complications qu'introduit en (A) la considération du foncteur f'u sont dues à la nécessité de spécifier - pour dériver la contradiction - que l'ensemble des parties d'ensemble est un ensemble et n'est pas élément de cet ensemble ou que le nombre ordinal d'un ensemble est successeur de l'ensemble. Or la genèse de la contradiction est indépendante de ces précisions et dépend uniquement, comme le prouve la forme simplifiée (B), des propriétés logiques de la matrice. On pourra donc se limiter à l'étude de cette forme:

$$\text{(B)}\quad (u)\{[(x)(x\,\varepsilon\,u \supset x \notin x)] \supset (u \notin u)\} \supset \\ \{[(\exists w)(y)(y \notin y \equiv y\,\varepsilon\,w)] \supset [(\exists w)(w \notin w \cdot w\,\varepsilon\,w)]\}.$$

La première réduction qu'on peut proposer a trait au premier membre de l'implication. En effet, le second membre:

---

1. Vuillemin, *L'origine et le mécanisme des antinomies dans la première philosophie de Russell* (*1903*), in Logique et Analyse, avril 1964, 25-26, p. 59-60. Dans cet article, on a formulé la matrice des antinomies sous la forme générale:

$$\text{(A)}\quad (u)\{[(x)(x\,\varepsilon\,u \supset \phi x)] \supset [\phi f`u \cdot f`u \notin u]\} \supset \\ \{[(\exists w)(y)(\phi y \equiv y\,\varepsilon\,w)] \supset [(\exists w)(\phi f`w \cdot \sim\phi f`w)]\}.$$

Received April 25, 1965