Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XI, Number 4, October 1970

LES ALGÈBRES DE HEYTING ET DE ŁUKASIEWICZ TRIVALENTES

LUIZ MONTEIRO

1. *INTRODUCTION*. Gr. Moisil a montré que les algèbres de Łukasiewicz trivalentes sont des algèbres de Heyting et il a utilisé ce résultat pour chercher une formalisation du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz ([9], [10]) dans laquelle l'implication intuitioniste joue un rôle fondamental ([14], [16], [17]).

Il faut remarquer que l'implication intuitioniste qu'on peut définir dans les algèbres de Łukasiewicz a des proprietés très speciales car elle varifie les egalités (equivalentes deux à deux):

H6) $((a \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow (((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow b) = 1$
H6') $(\neg a \Rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) = b$
H6'') $((a \Rightarrow c) \Rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) = b$

Nous avons étudié [23] les algèbres de Heyting que verifient H6, sous le nom d'algèbres de Heyting trivalentes et nous les appellons dans cette note des algèbres $\mathfrak{H}_3$; elles jouent un rôle important dans l'étude du *calcul propositionnel intuitioniste trivalent* consideré par Heyting [4], et qui a été étudié par J. Łukasiewicz [10] et I. Thomas [28].

Nous nous proposons de montrer, dans cette note, que les algèbres de Łukasiewicz (trivalentes) peuvent être définies[1] comme des algèbres $\mathfrak{H}_3$ sur lesquelles est définie une opération de négation ($\sim$) vérifiant les axiomes:

1. $\sim\sim x = x$;
2. $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$;
3. $(x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y) = x \wedge \sim x$.

Au paragraphe 4 nous indiquons un ensemble d'axiomes indépendants pour ces algèbres.

1. A. Monteiro, dans un séminaire du second semestre 1963 a posé le probleme de savoir s'il est possible de caractériser les algèbres de Łukasiewicz (trivalentes) au moyen des connectifs, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$. Nous avons resolu ce problème en 1963, en utilisant la théorie des filtres premiers. Plus tard nous avons obtenu la démonstration que nous indiquons dans cette note, où l'induction transfinie n'intervient pas.

Received September 15, 1969