Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XI, Number 3, July 1970

EIN NICHTKONSTRUKTIVER BEWEIS DES ERSTEN ε-THEOREMS

WILHELM K. ESSLER

Kaplan hat in [3] (S. 931) als Hilfssatz das erste ε-Theorem von Hilbert und Bernays ([2], S. 18 ff.) benutzt. Da er in seinen wissenschaftstheoretischen Theoremen nirgendwo eine finitäre, sondern stets die klassische zweiwertige Logik verwendet, erscheint es sinnvoll, nach einer kurzen nichtkonstruktiven Beweis dieses Hilfssatzes zu suchen, der ohne Umstände in wissenschaftstheoretischen Untersuchungen aufgeführt werden kann. Im folgenden wird ein derartiger Beweis erbracht.

Als Objektsprache wird eine Sprache der engeren Quantorenlogik verwendet. Dabei ist "v" das Adjunktionszeichen und "V" der Existenzquantor. Eine Interpretation J dieser Sprache ist eine nacheindeutige Relation, deren Vorbereich die Gesamtheit der Variablen und der nichtlogischen Konstanten ist und deren Nachbereich eine Gesamtheit bildet, die aus Dingen, Klassen von Dingen und Klassen von geordneten r-Tupeln von Dingen ($r > 1$) besteht, wobei den Gegenstandsausdrücken durch J Dinge, den Eigenschaftsausdrücken Klassen von Dingen und den r-stelligen Beziehungsausdrücken Klassen von geordneten r-Tupeln von Dingen zugeordnet werden.

Der Wahrheitsbegriff wird als dreistelliger Relationsausdruck verwendet und hat die Form "Der Satz ϕ ist bei der Interpretation J über dem Gegenstandsbereich B wahr". (Manchmal würde es ausreichen, ihn als zweistelligen Relationsausdruck zwischen Sätzen und Interpretationen anzugeben, wenn der Gegenstandsbereich B der Nachbereich der Relation J ist, falls deren Vorbereich auf die Gegenstandsausdrücke beschränkt wird; da die Gesamtheit der Gegenstandsausdrücke als nicht leer vorausgesetzt wird, ist damit automatisch auch B nicht leer.) Der Wahrheitsbegriff sei definitorisch oder axiomatisch so eingeführt, daß die beiden folgenden Sätze gelten:

Der Satz $\phi \vee \psi$ ist bei J über B wahr genau dann, wenn ϕ bei J über B wahr ist oder ψ bei J über B wahr ist.

Der Satz $\bigvee\xi\, \phi(\xi)$ ist bei J über B wahr genau dann, wenn es eine Interpretation K über B gibt, die sich von J höchstens bezüglich des Ausdrucks ξ unterscheidet, so daß $\phi(\xi)$ bei K über B wahr ist.

Received May 20, 1969