

BEMERKUNGEN ZU HENKINS BEWEIS FÜR DIE NICHTSTANDARD-
 VOLLSTÄNDIGKEIT DER TYPENTHEORIE

KLEMENS DÖPP

1 In seiner Arbeit "Completeness in the Theory of Types" (JSL 15 Nr.2 (1950), S. 81-91) hat Henkin gezeigt, daß jeder Ausdruck des von Church in "A Formulation of the Simple Theory of Types" (JSL 5 (1940), S. 56-68) entwickelten Systems der Typentheorie, der im von Henkin a.a.o. erklärten Nichtstandardsinn allgemeingültig ist, auch im Formalismus hergeleitet werden kann; dasselbe gilt—wie Henkin in einer Nachbemerkung ausführt—für eine große Zahl von abgewandelten Systemen. Der wesentliche Teil des Beweises wird durch den Nachweis geführt, daß jede widerspruchsfreie Menge von *abgeschlossenen* Ausdrücken im Nichtstandardsinn erfüllbar ist. Dieser Umstand hat Einschränkungen bei der Formulierung einiger verwandter Sätze zur Folge: Der Endlichkeitssatz für Nichtstandard-Erfüllbarkeit sowie der Satz von Löwenheim und Skolem gelten zunächst nur für Mengen von abgeschlossenen Ausdrücken. Als zweite Fassung des Vollständigkeitssatzes erhält man (unter Benutzung des Deduktionstheorems in der Formulierung von Church) zunächst nur, daß jede Nichtstandard-Folgerung aus einer Menge von abgeschlossenen Ausdrücken des Typs α auch aus dieser formal herleitbar ist; Entsprechendes gilt für den sich unmittelbar daran anschließenden Endlichkeitssatz für Nichtstandard-Folgerungen.

Die genannten Einschränkungen sind jedoch unnötig: Henkins Argumentation läßt sich nämlich *wörtlich* auch für Mengen von nicht notwendig abgeschlossenen Ausdrücken verwenden; dabei erhält lediglich das Lemma von S. 87 die abgeänderte, jedoch völlig ausreichende Fassung: Es gibt eine Belegung ϕ , sodaß für jeden Ausdruck \mathbf{B}_β gilt: $V_\phi(\mathbf{B}_\beta) = \Phi([\mathbf{B}_\beta^\phi])$. Damit wird zunächst die Forderung nach Abgeschlossenheit überflüssig. Die Voraussetzung, daß die Prämissenmengen nur Ausdrücke vom Typ α enthalten, wird schließlich dadurch entbehrlich, daß eine Hinzunahme von Ausdrücken anderer Typen als Prämissen keine weiteren Ausdrücke des Typs α herleitbar werden läßt, wie eine triviale Induktion über die Beweislänge zeigt.