ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 37, Number 6, 2007

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MÉTRIQUES D'EINSTEIN SUR LES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

HAMID-REZA FANAÏ

ABSTRACT. Using the formula for the Ricci tensor of a standard solvmanifold, we prove some properties of the map which defines the semi-direct product between the abelian part and the nilpotent part when our manifold is Einstein.

1. Introduction. Nous étudions dans cette note certains aspects des métriques invariantes à gauche d'Einstein sur les groupes de Lie résolubles. On sait que tous les exemples connus de variétés homogènes d'Einstein non-compactes et non-plates sont isométriques aux solvariétés d'Einstein (S, Q_0) où S désigne un groupe de Lie résoluble simplement connexe muni d'une métrique invariante à gauche d'Einstein Q_0. Nous travaillons en fait, avec les algèbres de Lie résolubles métriques $(\mathfrak{s}, Q)$. Une telle algèbre de Lie métrique est appelée standard [**7**] si $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]^\perp$ est abélien. On note $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ (la partie nilpotente) et $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^\perp$. Soit $H_Q \in \mathfrak{s}$ le vecteur défini par $Q(H_Q, X) = \operatorname{tr}\operatorname{ad}_X$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$.

Dans la formule de ric_Q (voir la partie suivante) l'application ad_{H_Q} apparaît de manière décisive. Nous étudions quelques propriétés de cette application. Dans la première partie nous présentons une propriété importante trouvée par Heber: soit $(\mathfrak{s}, [,])$ une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble munie d'une métrique d'Einstein standard Q_0. Alors d'après [**7**, Théorème 4.10] D_{H_0} la partie symétrique de $\operatorname{ad}_{H_0} \in \operatorname{End}(\mathfrak{s})$ est aussi une dérivation (et définie positive sur $\mathfrak{n}$), où $H_0 = H_{Q_0}$ est non nul (par hypothèse de non-unimodularité). En d'autre terme, $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ est isométrique à un espace de type Iwasawa. Ceci implique que ad_{H_0} est un opérateur normal de $(\mathfrak{s}, Q_0)$. La propriété qui nous intéresse est la suivante: pour une telle algèbre de Lie $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$, il existe un multiple positif unique $H_1 = \lambda H_0$ tel que l'opérateur normal $\operatorname{ad}_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$ a des valeurs propres dont les parties réelles $\mu_1 < \cdots < \mu_m$ sont des entiers sans diviseur commun

2000 AMS *Mathematics subject classification.* Primary 53C25, 53C30.
Keywords and phrases. Einstein space, homogeneous space.
Received by the editors on May 4, 2004, and in revised form on July 16, 2005.