ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 4, Number 1, Winter 1974

ZUR THEORIE P-BESCHRÄNKTER OPERATOREN

ERICH BOHL

In [9 c] werden Fehlerabschätzungen für ein Iterationsverfahren zur Lösung einer linearen Operatorgleichung $x = (A_1 - A_2)x + b$ mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes hergeleitet und in [1 *a*, *b*, 4, 9 d] weiter entwickelt. Diese Ergebnisse haben wir in [2 b] auf P-beschränkte Operatoren in einem halbgeordneten normierten Raum (h. n. Raum) $(X, \leqq, \| \ \|)$ durch einen mehr elementaren Zugang erweitert ohne den Satz von Schauder oder dessen Varianten heranzuziehen.

In [4, 9 a] werden bei nicht linearen Operatorgleichungen auf Räumen mit "allgemeinerem Abstandsbegriff" (in [4] P-Räume genannt) Fehlerabschätzungen und Konvergenzaussagen für ein Iterationsverfahren gemacht. Dabei ist der halbgeordnete Raum, in welchem die Abstände liegen, mit einem abstrakt definierten Grenzwertbegriff versehen. Nimmt man an, dass dieser Raum archimedisch geordnet ist und Ordnungseinheiten besitzt, so kann man sich von dem Grenzwertbegriff durch die Betrachtung der Ordnungstopologie befreien [2 d]. Die genannten Aussagen lassen sich dann dem klassischen Kontraktionssatz im metrischen Raum unterordnen [2 d].

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden oben erwähnten Methoden für Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen von Iterationsverfahren auf ihren gemeinsamen Ursprung zurückgeführt. Dazu betrachten wir auf einer nicht leeren Menge Y einen Abstand ρ (s. auch [2 d]), welcher $Y \times Y$ in einen h. n. Raum $(X, \leqq, \| \ \|)$ abbildet. Damit trägt Y auf natürliche Weise eine Metrik d_ρ (s. §3), und die Theorie der P-beschränkten Operatoren kann einheitlich für die P-Räume (symmetrischer Abstand $\rho : \rho(x, y) = \rho(y, x)$) und die h. n. Räume ($Y = X$, $\rho(x, y) = x - y$) entwickelt werden. Im einzelnen enthalten unsere Sätze 1 und 4 die Resultate aus [9 a, b, siehe auch 4, 10, 12 a] über Fehlerabschätzungen und Konvergenz von Iterationsverfahren bei Operatorgleichungen in P-Räumen. Häufig tritt der Satz 4 unter der Voraussetzung der Vollständigkeit des metrischen Raumes (Y, d_ρ) sowie einer der im Satz genannten Bedingungen (i) oder (iii) auf (s. [4, 9 a, b, 10], [12 a, Abschnitt 13.1]) : dann ist er, also auch alle seine Folgerungen, die in den aufgeführten Literatur-

---

Received by the editors February 2, 1972.

AMS 1970 *subject classifications*: Primary 47H10, 65J05, 46A40; Secondary 65N20, 65F10, 65H10.