ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 25, Number 3, Summer 1995

THEOREME DE LA GOUTTE LISSE

ABDELHAKIM MAADEN

1. Introduction. Soit $(X, |.|)$ un espace de Banach. $B_{(X,|.|)}$ désigne la boule unité de X. La goutte définie par $x \in X \backslash B_{(X,|.|)}$, notée $D(x, B_{(X,|.|)})$, est l'enveloppe convexe de $\{x\} \cup B_{(X,|.|)}$.

Dans le cas où un fermé S de X est à une distance positive de $B_{(X,|.|)}$, il existe toujours un élément $s \in S$ tel que $D(s, B_{(X,|.|)}) \cap S = \{s\}$, c'est le théorème de la goutte de Daneš [**3**]. Ce travail a été repris par plusieurs auteurs [**5, 8, 9**]. Remarquons ici qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse "S est à distance positive de $B_{(X,|.|)}$" par "S est disjoint de $B_{(X,|.|)}$." Lorsque pour tout S fermé non vide disjoint de $B_{(X,|.|)}$, il existe $s \in S$ tel que $D(s, B_{(X,|.|)}) \cap S = \{s\}$, on dit que X a la propriété de la goutte. Montesinos a montré que X a la propriété de la goutte si et seulement si X est réflexif et les convergences faibles et fortes des suites coïncident sur la sphère unité. Pour plus de détails sur cette propriété voir [**6, 7, 8**].

Dans cette note, en se basant sur le papier de Borwein et Preiss [**1, 10**], nous montrons une variante lisse du théorème de la goutte dans les espaces de Banach $(X, |.|)$ dont l'ensemble des normes équivalentes Fréchet-différentiables est dense dans l'ensemble des normes équivalentes muni de la métrique usuelle. Comme conséquence nous donnons un résultat analogue au théorème de Browder [**2**].

On désigne par $(\mathcal{P}, \rho)$ l'espace des normes équivalents à $|.|$ sur X, muni de la métrique donnée par $p, q \in (\mathcal{P}, \rho)$:

$$\rho(p, q) = \sup\{|p(x) - q(x)|; x \in B_{(X,|.|)}\}.$$

Notons que $\mathcal{P}$ est un sous-espace ouvert de l'espace (Q, ρ) des semi-normes continues sur $(X, |.|)$, muni de la métrique définie par $f, g \in (Q, \rho)$:

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in B_{(X,|.|)}\}.$$

Received by the editors on March 10, 1993.
Key words. Convexité, densité, différentiabilité, espace lisse, goutte, goutte lisse.