J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
31-3 (1991) 875–880

Conditions suffisantes pour la compacité de la résolvante d'un opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique

Par

Mokhtar MEFTAH

§ 0. Introduction

On considère sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique $H(\vec{a}) + V$ où:

$$H(\vec{a}) = \sum_{j=1}^{n} (D_j - a_j)^2 \qquad \text{où } D_j = i^{-1}\partial_{x_j}. \tag{0.1}$$

Le potentiel magnétique $\vec{a}(x)$ est défini par:

$$\vec{a}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)), \tag{0.2}$$

est supposé réel et de classe C^∞.
Le potentiel électrique $V(x)$ est supposé réel, semi-borné inférieurement et de la forme:

$$V(x) = \sum_{j=1}^{p} V_j(x)^2 \qquad \text{où } V_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{0.3}$$

Le champ magnétique est identifié à la matrice réelle et antisymétrique d'ordre n:

$$B(x) = (b_{jk})_{1 \leq j,k \leq n} = (\partial_{x_j} a_k(x) - \partial_{x_k} a_j(x))_{1 \leq j \leq k \leq n}. \tag{0.4}$$

Avec ces hypothèses, $H(\vec{a}) + V$ admet une unique réalisation auto-adjointe sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ (Cf. [SCH], [AV-HE-SI] ou [RE-SI]).
On définit la forme quadratique $q_V(\vec{a})$ par:

$$q_V(\vec{a})(u) = \langle (H(\vec{a}) + V)u, u \rangle. \tag{0.5}$$

On note $D(q_V(\vec{a}))$ le domaine de $q_V(\vec{a})$ et par $D(H(\vec{a}) + V)$ le domaine de $H(\vec{a}) + V$:

$$D(H(\vec{a}) + V) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n),\ (D_j - a_j(x))u \in L^2(\mathbf{R}^n), \tag{0.6}$$
$$(V + 1)^{(1/2)} u \in L^2(\mathbf{R}^n),\ (H(\vec{a}) + V)u \in L^2(\mathbf{R}^n)\}.$$

Communicated by T. Ikebe 1, December 1989