SUR LES NOMBRES DE JAMES DES VARIÉTÉS DE STIEFEL COMPLEXES

PAR

FRANÇOIS SIGRIST

I. Introduction et formulation du problème

Nous désignerons par $U_{n,k}$ la variété des $(n \times k)$ matrices unitaires. $U_{n,n}$ est le groupe $U(n)$, $U_{n,n-1}$ s'identifie à $SU(n)$, et $U_{n,1}$ est la sphère S^{2n-1}.

D'après JAMES [5], on peut associer à toute variété $U_{n,k}$ un nombre entier $U(n, k)$ défini comme suit: considérons la projection naturelle

$$U_{n,k} \xrightarrow{p} U_{n,1} = S^{2n-1};$$

cette application est une fibration de fibre $U_{n-1,k-1}$, dont nous pouvons écrire une partie de la suite exacte d'homotopie:

$$\to \pi_{2n-1}(U_{n,k}) \xrightarrow{p*} \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1}) \to \cdots$$

Le groupe $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ est $\mathbf{Z}$, engendré par $[\iota_n]$. Par définition, $U(n, k)$ est l'ordre de $\partial[\iota_n]$ dans $\pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1})$.

JAMES a etabli un grand nombre de propriétés du système de nombres $U(n, k)$ dans [5]. L'utilité de ces nombres est évidente: pour qu'il existe une application $S^{2n-1} \to U_{n,k}$ de degré q, il faut et il suffit que q soit un multiple de $U(n, k)$. L'étude des fibrations $U_{n,k} \to S^{2n-1}$ qui admettent une section consiste à déterminer les valeurs de n et k pour lesquelles $U(n, k) = 1$. JAMES [5] démontre qu'il existe un nombre b_k tel que les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $U(n, k) = 1$: la fibration $U_{n,k} \to S^{2n-1}$ a une section.
(ii) n est un multiple de b_k.

ATIYAH et TODD [2] ont donné un diviseur M_k de b_k ; ADAMS et WALKER [1] ont ensuite démontré que $M_k = b_k$. En désignant par $\nu_p(m)$ l'exposant du nombre premier p dans la décomposition de m en facteurs premiers, le résultat général se formule ainsi: les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $U(n, k) = 1$; la fibration $U_{n,k} \to S^{2n-1}$ a une section.
(ii) n est un multiple de b_k défini par

$$\begin{aligned} \nu_p(b_k) &= \sup_r [r + \nu_p(r)], \qquad 1 \le r \le [(k-1)/(p-1)], \quad p \le k \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad p > k. \end{aligned}$$

(iii) Les k premiers coefficients de la série de MacLaurin de $t^{-n}[\log(1+t)]^n$ sont entiers.

Received June 29, 1967.