

ZUM ISOMORPHIEPROBLEM FÜR GRUPPEN MIT EINER DEFINIERENDEN RELATION

BY

GERHARD ROSENBERGER

Herrn Professor W. Magnus in Dankbarkeit gewidmet

1. Einleitung

A. In dieser Note beschäftigen wir uns mit den Gruppen

$$G = \left\langle a_1, \dots, a_g, t_1, u_1, \dots, t_q, u_q \mid \left(a_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g} \prod_{i=1}^q [t_i, u_i] \right)^\alpha = 1 \right\rangle,$$

$\alpha \geq 1$, $n_j \geq 2$ ($j = 1, \dots, g$) sowie $g \geq 2$ falls $q = 0$. Diese Gruppen sind von großem Interesse sowohl für die Gruppentheorie (als Gruppen mit einer definierenden Relation) als auch für die Topologie (vgl. [9]).

Hier zeigen wir: Ist $\alpha \geq 2$ und $\{x_1, \dots, x_{2q+g}\}$ ein Erzeugendensystem von G , so gibt es einen freien Übergang (Nielsen-Transformation) von $\{x_1, \dots, x_{2q+g}\}$ zu dem System $\{a_1, \dots, a_g, t_1, u_1, \dots, t_q, u_q\}$ (Satz 2). Dadurch lösen wir das Isomorphieproblem für die Gruppen G mit $\alpha \geq 2$ in dem Sinn, daß wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob eine beliebige Gruppe mit einer definierenden Relation zu einer Gruppe G mit $\alpha \geq 2$ isomorph ist oder nicht. Weiter ist eine Gruppe G mit $\alpha \geq 2$ nach Satz 2 und [4] eine Hopfsche Gruppe, d.h. jeder Endomorphismus von G auf G ist ein Automorphismus.

Für eine Gruppe G mit $\alpha = 1$ gilt eine Aussage wie in Satz 2 im allgemeinen nicht. Eine Kennzeichnung aller Erzeugendensysteme $\{x_1, \dots, x_{2q+g}\}$ einer Gruppe G mit $\alpha = 1$ wird durch Satz 3 gegeben.

Durch Satz 1 erhalten wir einen Überblick über Lösungen einer Gleichung in einem freien Produkt zyklischer Gruppen.

B. Diese Note verwendet die Terminologie und Bezeichnungsweise von [8] und [6], wobei $\langle \dots \mid \dots \rangle$ die Gruppenbeschreibung durch Erzeugende und definierende Relationen bedeutet. Unter $H = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ verstehen wir die von den $a_1, \dots, a_n$ erzeugte Gruppe. Sind $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{y_1, \dots, y_n\}$ minimale Erzeugendensysteme von $H = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, so sagen wir: $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{y_1, \dots, y_n\}$ liegen in einer Nielsen-Äquivalenzklasse, wenn es einen freien Übergang von $\{x_1, \dots, x_n\}$ zu $\{y_1, \dots, y_n\}$ gibt.

Ist in einer Gruppe H eine Länge L definiert, so sagen wir wie in [6], daß ein System $\{g_j\}_{j \in J} \subset H$ die Nielsensche Eigenschaft hat, wenn gilt:

(1) $L(g_i^\varepsilon g_j^\eta) \geq \max \{L(g_i), L(g_j)\}$ für $\varepsilon, \eta = \pm 1$ und $i \neq j$ oder $i = j$, $\varepsilon = \eta$,

(2) $L(g_k^\varepsilon g_i g_j^\eta) > L(g_k) - L(g_i) + L(g_j)$ für $\varepsilon, \eta = \pm 1$ und $k \neq i \neq j$, $g_i \neq 1$ oder $k = i \neq j$, $g_i \neq 1$, $\varepsilon = 1$ oder $k \neq i = j$, $g_i \neq 1$, $\eta = 1$.

Received November 14, 1974.