ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 37, Number 1, Spring 1993

MAJORATION HARMONIQUE ET MOUVEMENT BROWNIEN

JEAN BROSSARD ET LUCIEN CHEVALIER

Soit ν un entier ≥ 2, et soit D un domaine de $\mathbf{R}^\nu$. Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in \mathbf{R}^\nu$, et tout entier k tel que $0 \leq k \leq \nu$, on pose

$$r_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}, \quad \text{et} \quad r(x) = r_\nu(x) = |x|.$$

Dans un récent travail [8], M. Essén a obtenu des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, portant sur la fonction r_1, pour que l'application r^p admette un majorant harmonique dans D, dans les cas où $p > 1$ et $p = 1$, et a posé quelques questions naturelles relatives au "cas limite" où $p = 1$.

Nous nous proposons de donner ici, au moyen de méthodes probabilistes, une démonstration plus rapide des résultats de [8] (théorèmes 1 et 2), une réponse aux questions posées, et un théorème dans le même esprit (théorème 5), valable pour tout $p > 0$. Essentiellement, les outils que nous utiliserons sont des propriétés bien connues du mouvement brownien et des inégalités de la théorie des martingales; celles qui interviennent dans notre démonstration des théorèmes 1, 2 et 5 sont une caractérisation des classes H^p; elles sont classiques et ont déjà prouvé leur efficacité dans ce contexte (cf. [1], par exemple). Celles qui sont à la base des théorèmes 3 et 4 sont une caractérisation, plus récente, de la classe $L \log L$.

Le plan de l'article est le suivant: dans le §1, nous rappelons deux résultats qui permettent de caractériser de manière probabiliste l'existence de majorants harmoniques. Dans le §2, nous étudions le problème (de l'existence d'un majorant harmonique pour l'application r^p) dans le cas où $p > 1$. Le §3 est consacré au cas où $p = 1$, à propos duquel quelques questions étaient restées ouvertes. Enfin, nous obtenons dans le §4 un résultat nouveau de même nature, qui s'applique à tout exposant $p > 0$.

1. Deux lemmes techniques

Soit

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, (P^x)_{x \in \mathbf{R}^\nu})$$

Received April 3, 1991.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 31A05, 31B05; Secondary 42B30, 60G46.