

SU UNA CLASSE DI GRUPPI FINITI INTRODOTTA DA McLAIN

In memoria di G. A. Miller

DI

GUIDO ZAPPA

In un recente lavoro¹ McLAIN ha studiato diverse interessanti classi di gruppi finiti, caratterizzate dall'esistenza di sottogruppi di dato ordine. Una delle più notevoli è quella dei gruppi verificanti la proprietà da lui chiamata A1: un gruppo finito G si dice verificare la proprietà A1 quando, comunque si scelga un sottogruppo H di G , e comunque si prenda un intero m che divida l'ordine di G e sia divisibile per l'ordine di H , esiste un sottogruppo di G d'ordine m che contiene H .

McLAIN ha determinato varie proprietà che sono equivalenti alla proprietà A1, ma di più facile studio; tra queste la proprietà A3, consistente nel fatto che il normalizzante di ogni sottogruppo H del gruppo ha un indice che non è divisibile per alcun numero primo che sia minore di tutti i divisori dell'ordine di H . Si ha facilmente che i gruppi verificanti A3, e quindi A1, sono particolari gruppi supersolubili.

La difficoltà di determinare tutti i gruppi verificanti A1 consiste fra l'altro nel fatto che, come ha mostrato con un esempio lo stesso McLAIN, se un gruppo verifica A1, non necessariamente ogni suo sottogruppo la verifica.

Il McLAIN ha fatto vedere tra l'altro che un gruppo finito verifica A1 se e soltanto se è risolubile e ogni suo sottogruppo di HALL² il cui ordine sia divisibile per due soli numeri primi distinti, verifica anch'esso A1. Pertanto, una volta determinati tutti i gruppi d'ordine $p^\alpha q^\beta$ (p, q primi) verificanti A1, non dovrebbe essere difficile determinare tutti i gruppi finiti verificanti A1.

La presente nota costituisce appunto un primo studio dei gruppi d'ordine $p^\alpha q^\beta$ verificanti A1.

Supposto $p > q$, un gruppo finito G d'ordine $p^\alpha q^\beta$ che verifica A1 e quindi A3 ha evidentemente un sottogruppo normale P d'ordine p^α . Dopo alcune osservazioni preliminari (n. 1), determino facilmente (n. 2) tutti i gruppi in questione nel caso in cui P sia abeliano. Passo poi (n. 3) all'esame del caso, alquanto più complesso, in cui la serie centrale discendente di P ha lunghezza 2, e determino (3.5) una condizione necessaria perchè un gruppo d'ordine $p^\alpha q^\beta$ ($p > q$) col sottogruppo d'ordine p^α a serie centrale discendente

Received February 4, 1959. The editors regret that this paper was received too late to be included in the G. A. Miller Memorial Issue.

¹ D. H. McLAIN, *The existence of subgroups of given order in finite groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 53 (1957), pp. 278-285.

² Ricordiamo che dicesi *sottogruppo di HALL* di un gruppo finito, un sottogruppo il cui ordine sia primo con l'indice.