

# ÜBER PRODUKTE VON NILPOTENTEN GRUPPEN

G. A. Miller zum Gedächtnis

VON  
HELMUT WIELANDT

## 1. Übersicht

Ein bekannter Satz von P. HALL [2, p. 198; 3, p. 319] besagt:

*Eine endliche Gruppe ist genau dann auflösbar, wenn sie sich als das Produkt von paarweise vertauschbaren Untergruppen von Primzahlpotenzordnung darstellen läßt.*

Dieser Satz ist deswegen von Bedeutung, weil er einen engen Zusammenhang zwischen der Normalstruktur und der arithmetischen Struktur herstellt. Die beiden in ihm enthaltenen Aussagen liegen verschieden tief. Der Nachweis, daß die Bedingung hinreicht, ist weit schwieriger als der der Notwendigkeit. Daher erscheint jede Abschwächung der hinreichenden Bedingung von Interesse. In dieser Richtung beweisen wir:

**SATZ 1.** *Die endliche Gruppe  $G$  sei das Produkt von nilpotenten Untergruppen  $G_1, \dots, G_r$ , von denen je zwei als Ganze vertauschbar sind und teilerfremde Ordnungen haben. Dann ist  $G$  auflösbar.*

Den Beweis brauchen wir nur für  $r = 2$  zu führen; denn es ist bekannt, daß das Produkt von mehreren paarweise vertauschbaren nilpotenten endlichen Gruppen genau dann auflösbar ist, wenn alle Produkte von je zweien dieser Gruppen auflösbar sind [5, p. 1]. Wir beweisen den Satz für  $r = 2$  in einer erweiterten Fassung:

**SATZ 2.** *Es sei  $G = AB$ ; darin seien  $A, B$  nilpotente Untergruppen von  $G$ , deren Ordnungen  $|A|, |B|$  teilerfremd sind. Dann ist  $G$  auflösbar; und wenn  $P, Q$  Sylowgruppen von  $G$  sind, derart daß  $|P|$  ein Teiler von  $|A|$ ,  $|Q|$  ein Teiler von  $|B|$  ist, so ist  $PQ = QP$ .*

Die Voraussetzung  $G = AB$  kann durch  $|G| = |A| \cdot |B|$  ersetzt werden, da  $A$  und  $B$  wegen der Teilerfremdheit der Ordnungen nur das Einselement 1 gemeinsam haben.

Es erscheint schwierig, die Voraussetzung der Nilpotenz noch weiter abzuschwächen. Keinesfalls genügt es für die Auflösbarkeit von  $AB$ , wenn  $A$  nilpotent und  $B$  überauflösbar ist; das sieht man aus der Zerlegung der Iko-saedergruppe in Faktoren der Ordnungen 5 und 12.

Offen bleibt die interessante Frage, ob man die Voraussetzung der Teilerfremdheit weglassen kann.

---

Received November 4, 1958.