MÉTHODE DES FIBRATIONS ET OBSTRUCTION DE MANIN

DAVID HARARI

La méthode des fibrations pour établir que certaines classes de variétés définies sur un corps de nombres k vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible a déjà été employée avec succès dans de nombreux cas: ses premiers exemples subtils d'application ont été introduits en 1987 par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer qui ont obtenu des résultats sur les intersections de deux quadriques et les surfaces de Châtelet [12]. On peut également citer les résultats de Colliot-Thélène et Salberger sur certains types d'hypersurfaces cubiques [9] et les divers énoncés obtenus par Skorobogatov dans [48]. Des résultats généraux sur ce sujet, ainsi que d'autres exemples d'application, sont exposés dans [3]. Le principe de ces méthodes consiste à essayer de montrer qu'une variété fibrée vérifie le principe de Hasse ou l'approximation faible dès lors que la base et les fibres ont ces mêmes propriétés.

Cependant, pour beaucoup de classes de variétés (les hypersurfaces cubiques par exemple), la conjecture raisonnable n'est pas qu'elles vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible mais seulement que l'obstruction de Manin à ces deux propriétés est la seule. Cette obstruction a été introduite pour le principe de Hasse par Manin en 1970 [34] et l'obstruction analogue pour l'approximation faible fut formulée vers 1976 par Colliot-Thélène et Sansuc dans trois notes aux Comptes Rendus [10]. L'obstruction de Manin a permis d'expliquer tous les contre-exemples explicites au principe de Hasse et à l'approximation faible connus à ce jour et elle apparaît de manière essentielle dans les méthodes de descente; ces dernières furent introduites en 1977 par Colliot-Thélène et Sansuc [10]. Elles sont par exemple utilisées avec succès dans [12], [9], [47].

Le but de cet article est de relier la méthode des fibrations à l'obstruction de Manin: plus précisément, il s'agit d'établir sous certaines conditions que l'obstruction de Manin au principe de Hasse ou à l'approximation faible est la seule pour une variété fibrée en supposant que les fibres ont cette même propriété (et non plus forcément vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible). Ceci fait l'objet des théorèmes 4.2.1 et 4.3.1 qui sont les résultats principaux de ce travail.

L'intérêt est, par exemple, que l'obstruction de Manin peut très bien s'évanouir sur la variété fibrée alors que ce n'est pas le cas sur les fibres; ainsi, cela permet d'établir le principe de Hasse et l'approximation faible pour certaines variétés là où la méthode des fibrations classiques échouait (on verra dans ce texte des

Reçu le 8 octobre 1993.