Vol. 67, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © July 1992

ÉTUDE DES SOLUTIONS GÉNÉRALISÉES POUR UN SYSTEME HAMILTONIEN AVEC POTENTIEL SINGULIER

ANNE BEAULIEU

0. Introduction. On étudie les solutions définies sur R, à valeurs dans R^n et T-périodiques du système:

$$(HS) \qquad q'' = -V_q'(q, t).$$

On suppose que le potentiel $V(q, u)$, défini sur $R^n \times R$, est T-périodique par rapport à la variable u. La notation V_q' désigne la dérivée de V par rapport à la variable q, et la notation V_u' désigne la dérivée de V par rapport à la variable u. Nous nous plaçons dans les conditions de l'article de A. Bahri et P. H. Rabinowitz [1] qui montre l'existence de solutions de (HS) par des méthodes de minimax, quand la dimension n est supérieure ou égale à 3. Le potentiel V doit satisfaire les conditions suivantes par rapport à la variable q:

(V_1) $V \in C^1(R^n \setminus \{0\})$.

(V_2) $V < 0$ et V et V' tendent uniformément vers 0 quand $|q|$ tend vers $+\infty$.

(V_3) $-V$ tend vers $+\infty$ quand $|q|$ tend vers 0.

Rappelons la condition suivante, introduite par Gordon:

$$(G) \qquad -V \geqslant |Z'|^2 \qquad q \in W \setminus \{0\}$$

où Z est un potentiel tel que $Z(q)$ tende vers l'infini quand q tend vers 0 et où W est un voisinage de 0 dans R^n. Quand le potentiel V est équivalent en 0 à $-C|q|^{-\beta}$, où C est une constante positive, la condition (G) est vérifiée quand β est un nombre réel supérieur ou égal à 2 et n'est pas vérifiée quand β est un nombre réel positif inférieur à 2. Les résultats obtenus dans [1] montrent qu'il existe au moins une solution de (HS) quand la condition (G) est vérifiée. Quand la condition (G) n'est pas vérifiée, on trouve dans [1] la construction d'au moins une solution généralisée de (HS). Suivant [1], une fonction T-périodique q est appelée solution généralisée de (HS) si elle vérifie les conditions suivantes:

(A) La fonction q ne peut s'annuler que sur un ensemble O de mesure nulle.

(B) Sur l'ensemble $R \setminus O$, q est de classe C^2 et satisfait (HS).

(C) L'intégrale $I(q) = \int_0^T (\frac{1}{2}|q'|^2(t) - V(q(t), t))\, dt$ est finie.

(D) La fonction $\frac{1}{2}|q'|^2 + V(q, t) - \int_0^t V_u'(q(s), s)\, ds$ est constante sur $R \setminus O$.

Pour une solution généralisée q nous appellons temps de collision tout temps t tel que $q(t) = 0$.

Received 30 November 1991.